

**INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CHIHUAHUA**  
**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

---

***“DISEÑO Y ANÁLISIS DE UN SISTEMA DE  
TRANSMISIÓN DE UN AUTOMÓVIL  
OMNIDIRECCIONAL”***

***TESIS***

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE**

***MAESTRO EN INGENIERÍA MECATRÓNICA***

**PRESENTA:**

***MIGUEL FERNANDO MACÍAS MACÍAS***

**DIRECTOR DE LA TESIS:**

***Dr. CARLOS ARTURO MÉNDEZ HERRERA***



**SEP**  
SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO



**CHIHUAHUA CHIH. JUNIO 2019**



**SEP**  
SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Instituto Tecnológico de Chihuahua

"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

Chihuahua, Chih., 12 de junio de 2019

**M.F. LUIS CARDONA CHACÓN**  
**JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**  
**PRESENTE**

Por medio de la presente notificamos a usted que en cumplimiento de los requerimientos para la obtención de grado de Maestro, el documento de tesis del **C. MIGUEL FERNANDO MACÍAS MACÍAS**, ha sido aprobado y aceptado para su impresión. El título de la tesis es:

**"DISEÑO Y ANÁLISIS DE UN SISTEMA DE TRANSMISIÓN DE UN AUTOMÓVIL OMNIDIRECCIONAL"**

Por lo que proponemos, le sea concedida la autorización de impresión correspondiente.

Agradeciendo la atención a la presente, quedamos de usted:

**ATENTAMENTE**  
*Excelencia en Educación Tecnológica®*

**Dr. Carlos Arturo Méndez Herrera.**  
**MIEMBRO DEL JURADO DE EXAMEN**

**M.C. Rogelio Enrique Baray Arana.**  
**MIEMBRO DEL JURADO DE EXAMEN**

**Dr. Oscar Arturo Chávez López**  
**MIEMBRO DEL JURADO DE EXAMEN**

**M.C. José Salvador Antonio Méndez Aguirre.**  
**MIEMBRO DEL JURADO DE EXAMEN**

LCC/reba.\*





**SEP**  
SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Instituto Tecnológico de Chihuahua

"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

Chihuahua, Chih., 12 de junio de 2019

**C. MIGUEL FERNANDO MACÍAS MACÍAS**  
**PRESENTE**

Por este conducto le comunico que, a propuesta del Jurado de Examen, la División de Estudios de Posgrado e Investigación le ha concedido la autorización para la impresión de tesis para obtener el grado de Maestro, cuyo título es:

**"DISEÑO Y ANÁLISIS DE UN SISTEMA DE TRANSMISIÓN DE UN AUTOMÓVIL OMNIDIRECCIONAL"**

Con el siguiente contenido de capítulos:

- I. Introducción y antecedentes.
- II. Marco teórico.
- III. Conceptualización del mecanismo.
- IV. Junta homocinética.
- V. Diseño del mecanismo.
- VI. Resultados y conclusiones.

**ATENTAMENTE**  
*Excelencia en Educación Tecnológica*

**M.F. LUIS CARDONA CHACÓN**  
**JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**



SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA  
INSTITUTO TECNOLÓGICO  
DE CHIHUAHUA

LCC/reba\*



Ave Tecnológico No. 2909 Col. 10 de Mayo C.P. 31310, Chihuahua, Chih. México  
Tel. 01 (614) 201 2000, (614) 413 5187, Ext. 2150 e-mail: dir\_chihuahua@tecnm.mx

[www.tecnm.mx](http://www.tecnm.mx) | [www.itchihuahua.edu.mx](http://www.itchihuahua.edu.mx)



Dra. María Elena Álvarez Buylla

Director de CONACYT.

P r e s e n t e.

Por este conducto aprovecho la ocasión para saludarle e informarle que a la fecha he obtenido el Grado de Maestría en Ingeniería Mecatrónica en la División de Estudios de Posgrado e Investigación del Instituto Tecnológico de Chihuahua. Motivo por el cual agradezco todo el apoyo brindado por esta Institución que Usted representa, el otorgamiento de la beca-crédito, la cual permitió dedicarme de tiempo completo a la realización de mis estudios de Posgrado y de esta manera lograr el cumplimiento del objetivo principal del convenio establecido.

Sin otro particular por el momento, me es grato quedar de Usted como su seguro servidor, no sin antes reiterar mi agradecimiento. ¡Muchas Gracias!

A t e n t a m e n t e

Miguel F. Macias M.

Miguel Fernando Macias Macias

Ex becario CONACYT

## **Dedicatoria y Agradecimientos**

Dedico esta tesis a mis padres; Miguel Ángel Macías Armendáriz y María Guadalupe Macías Gardea quienes siempre me apoyaron incondicionalmente en la parte económica de mi formación para poder llegar a ser un profesionista. A mi hermana; María Estefanía Macías Macías y demás familia en general por el apoyo que siempre me brindaron día a día en el transcurso de cada semestre de mi vida estudiantil.

Mi agradecimiento especial al Instituto Tecnológico de Chihuahua, el cual tras haber pasado el examen de admisión me abrió sus puertas para formarme.

A cada uno de los profesores que me incentivaron a crecer como ingeniero con sus diferentes formas de enseñar, y a los profesores que me apoyaron para seguir adelante.

También agradezco a todas aquellas personas que siempre estuvieron conmigo en las buenas y en las malas.

Y finalmente agradezco a la persona que me enseñó que debo conservar lo que tengo, olvidar lo que me duele, y luchar por lo que quiero.

Atte. Miguel Fernando Macías Macías

## Prefacio

La palabra omnidireccional se compone de dos palabras; la primera “omni” que por su raíz grecolatina es un prefijo que significa “todo”. La segunda palabra es direccional haciendo referencia a la palabra “dirección”. Debido a esto un vehículo omnidireccional es un vehículo con la capacidad de desplazarse en todas las direcciones sobre el plano que lo sostiene.

En un automóvil convencional los neumáticos cuentan con 2 grados de libertad o D.o.F. por sus siglas en inglés, (DEGREE OF FREEDOM). Estos son dos grados de libertad de tipo rotativo. El primero es concéntrico con el radio de la llanta siendo el que refleja la potencia del motor, proporcionando un módulo a un vector de movimiento (ya sea positivo, o negativo cuando el carro va de reversa), en un plano paralelo a la superficie en la que se encuentra el vehículo. El segundo está relacionado con la maniobrabilidad del neumático, proporcionando dirección al vector de movimiento anteriormente mencionado.

Pero debido a la naturaleza de los sistemas de transmisión de potencia que se usan convencionalmente en los automóviles, este último grado de libertad tiene un margen de rotación limitado (únicamente en el par de llantas delanteras). No permitiendo desplazamientos laterales que requerirían un rango de  $90^\circ$  a  $-90^\circ$ , por lo que las trayectorias posibles a realizar por dichos automóviles se encuentran acotadas, esto se hace particularmente notorio en ambientes reducidos o con obstáculos donde el manejo para evitar colisiones suele ser complejo.

El proyecto que aquí se presenta estará enfocado a un ámbito de investigación para el diseño de sistemas de transmisión de potencia no convencionales. Haciendo uso de diferentes tipos de herramientas como son el CAD (COMPUTER AIDED DESIGN), CAE (COMPUTER AIDED ENGINEERING) entre otras.

## Tabla de Contenidos

DEDICATORIA Y AGRADECIMIENTOS .....	2
PREFACIO .....	6
TABLA DE CONTENIDOS.....	7
TABLA DE FIGURAS .....	9
1 CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES .....	13
1.1 MOVIMIENTO OMNIDIRECCIONAL.....	16
1.2 VENTAJAS DE UN VEHÍCULO OMNIDIRECCIONAL .....	17
1.3 LLANTAS OMNIDIRECCIONALES .....	18
1.4 RUEDAS CON COMPONENTES PASIVO ACTIVO .....	18
1.4.1 OMNIWHEEL .....	19
1.4.2 MECANUM .....	20
1.4.3 WESNWESN®.....	21
1.4.4 FLEXIWHEEL.....	22
1.4.5 OMNIBALL .....	23
1.5 RUEDAS CON DOS COMPONENTES ACTIVOS .....	24
1.5.1 OMNICRAWLER.....	24
1.5.2 LIDDIARD WHEEL .....	26
1.5.3 BALLWHEEL .....	27
1.5.4 SISTEMA ACROBAT.....	30
1.6 TECNOLOGÍA <i>IN WHEEL</i> .....	31
1.7 MODULAR ROBOTIC VEHICLE .....	33
2 CAPÍTULO II MARCO TEÓRICO .....	36
2.1 GEOMETRÍA DE ACKERMANN .....	36
2.1.1 CÁLCULO DE LA POSICIÓN DEL CENTRO DE GIRO EN GEOMETRÍA DE ACKERMANN.....	41
2.2 MECANISMO DE CUATRO BARRAS.....	46
2.2.1 LEY DE GRASHOF.....	47
2.2.2 CLASIFICACIÓN DE MOVIMIENTOS.....	47

2.2.3 ESQUEMA DEL MECANISMO DE CUATRO BARRAS .....	52
2.2.4 ANÁLISIS DE POSICIÓN DE UN MECANISMO DE 4 BARRAS.....	57
3 CAPÍTULO III CONCEPTUALIZACIÓN DEL MECANISMO.....	71
3.1 ¿COMO LOGRAR UN MOVIMIENTO OMNIDIRECCIONAL? .....	71
3.2 DISEÑO DE PROTOTIPO INICIAL:.....	72
4 CAPÍTULO IV JUNTA HOMOCINÉTICA .....	87
4.1 JUNTAS HOMOCINÉTICAS EXPLORADAS .....	88
DISEÑO DE UN ENGRANE A PARTIR DE CONCEPTOS GEOMÉTRICOS. MINÚSCULAS.....	92
4.2 DISEÑO DE ARTICULACIÓN HOMOCINÉTICA .....	128
5 CAPÍTULO V DISEÑO DEL MECANISMO .....	131
5.1 DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE .....	131
5.2 ENSAMBLE FINAL .....	135
5.3 SIMULACIÓN CINEMÁTICA.....	137
6 CAPÍTULO VI RESULTADOS Y CONCLUSIONES .....	138
ANEXO 1. MEDIDAS DE COCHES ELÉCTRICOS NUEVOS ORDENADOS POR LONGITUD.....	146
ANEXO 2. VISTA SUPERIOR DE LAS POSICIONES CRÍTICAS DEL MECANISMO.	148
ANEXO 2. VISTA ISOMÉTRICA DE LAS POSICIONES CRÍTICAS DEL MECANISMO. .....	154
REFERENCIAS.....	158

## Tabla de figuras

Figura 1.1: Prototipo 4WIDIS EV [1], [2].....	13
Figura 1.2: trayectorias de maniobras típicas para vehículos convencionales y vehículos omnidireccionales [21].....	17
Figura 1.3: Llanta omniwheel modelada en solidworks .....	19
Figura 1.4: llanta mecanum wheel [25] .....	20
Figura 1.5: llanta wesnwesn [26] .....	21
Figura 1.6: silla omnidireccional patrafour [26] .....	21
Figura 1.7: laquos wheel [28] y esquema de patente [27] .....	22
Figura 1.8: vista seccionada de omniball [29] .....	23
Figura 1.9: Estructura de omniball [29].....	23
Figura 1.10: esquema básico de omnicrawler [30] .....	24
Figura 1.11: principio básico del omnicrawler [30].....	25
Figura 1.12: liddiard wheel [31] .....	26
Figura 1.13: esquema de un chasis soportado por tres ballwheel[32] .....	27
Figura 1.14: diseño inicial del mecanismo ballwheel [32] .....	27
Figura 1.15: diseño genérico tipo a de ballwheels [32] .....	28
Figura 1.16: esquema del mecanismo de transmisión y vista en perspectiva de un robot omnidireccional que usa ballwheels [33].....	29
Figura 1.17: una transmisión de doble bola motorizada [34] .....	30
Figura 1.18: Llanta Del Vehículo Omnidireccional Desarrollado Por El Dr. Tom Qi [1] .....	31
Figura 1.19: esquemas de la patente electric motor [4] .....	32
Figura 1.20: fotografía del modular robotic vehicle [36] .....	33
Figura 1.21: diagrama explosionado del MVR [36] .....	34
Figura 1.22: captura del MVR en un video de CNN [37].....	35
Figura 2.5: dibujo hecho por ackerman para la patente de 1818 [38].....	37
Figura 2.1: bocetos basados en las cartas de darwin por desmond king hele [38] .....	40
Figura 2.2: criterio de darwin para una buena dirección [38].....	40
Figura 2.3: diagrama de geometría de ackerman durante un viaje recto [38].....	41
Figura 2.4: diagrama de geometría de ackerman durante una vuelta [38].....	41
Figura 2.6: mecanismo de cuatro barras formado para propulsar una bicicleta [40].....	46

Figura 2.7: configuración deltoide con corneta [6].....	50
Figura 2.8: configuración manivela-balancín [6].....	50
Figura 2.9: configuración balancín-balancín [6].....	51
Figura 2.10: configuración de paralelogramo [6] .....	51
Figura 2.11: Esquema 1 del mecanismo de cuatro barras.....	53
Figura 2.12: Esquema 2 del mecanismo de cuatro barras.....	54
Figura 2.13: Esquema 3 del mecanismo de cuatro barras.....	54
Figura 2.14: Esquema 4 del mecanismo de cuatro barras.....	55
Figura 2.15: Esquema 5 del mecanismo de cuatro barras.....	56
Figura 2.16: Esquema 6 del mecanismo de cuatro barras.....	56
Figura 2.17: Esquema vectorial del mecanismo de cuatro barras.....	57
Figura 3.1: altura que se mide según la leyenda de los neumáticos comerciales. ....	73
Figura 3.2: representación de la vista superior de un neumático en geogebra .....	76
Figura 3.3: visualización del neumático rotado $90^\circ$ . ....	77
Figura 3.4: visualización del neumático con una rotación de $0^\circ$ . ....	77
Figura 3.5: visualización del neumático rotado $180^\circ$ .....	78
Figura 3.6: esquema que muestra una flecha ortogonal al neumático .....	78
Figura 3.7: primer bosquejo en geogebra del mecanismo deseado. ....	79
Figura 3.8: esquema del mecanismo en función de las distancias $L1$ y $L4$ .....	81
Figura 3.9: mecanismo con neumático a $90^\circ$ y dependencia entre las longitudes de sus barras ..	81
Figura 3.10: mecanismo con neumático a $0^\circ$ y dependencia entre las longitudes de sus barras ..	82
Figura 3.11: mecanismo con neumático a $180^\circ$ y dependencia entre las longitudes de sus barras .....	82
Figura 3.12: esquema de posición donde la barra uno y dos forman un triángulo rectángulo .....	83
Figura 3.13: esquema que muestra dos mecanismos encontrados sobre un mismo eje.....	84
Figura 3.14: esquema del mecanismo de un eje incluyendo el diferencial. (centrar).....	85
Figura 3.15: esquema del mecanismo con las dimensiones seleccionadas.....	86
Figura 4.1: visualización del mecanismo S4R.....	88
Figura 4.2: flip gear [45].....	89
Figura 4.3: modelo encontrado al tratar de imitar el flip gear .....	90
Figura 4.4: esquema de engranes esféricos de Hanling Hong [46].....	91

Figura 4.5: Mecanismo de cilindros rotativos.....	92
Figura 4.6: esquema de diámetros de paso en contacto.....	93
Figura 4.7: esquema de cuerda que se desenrolla.....	94
Figura 4.8: involuta vista desde el centro del yo-yo.....	95
Figura 4.9: ángulo que define la involuta.....	96
Figura 4.10: ángulos beta y gamma.....	97
Figura 4.11: denominación de segmentos de recta según su equivalente en un triángulo rectángulo.....	98
Figura 4.12: curva involuta graficada desde Alfa igual a 0° hasta 1440°.....	107
Figura 4.13: gráfica de las ecuaciones (4-32).....	110
Figura 4.14: gráfica de las ecuaciones (4-35).....	111
Figura 4.15: gráfica de las ecuaciones (4-37).....	112
Figura 4.16: representación visual del anti juego de los engranes.....	118
Figura 4.17: elementos representados en un programa CAD.....	120
Figura 4.18: altura máxima permisible del diente de un engrane.....	121
Figura 4.19: diente de un engrane delimitado por el diámetro base y el diámetro exterior.....	123
Figura 4.20: perfil de un engrane típico.....	124
Figura 4.21: corte circular entre dientes.....	125
Figura 4.22: engrane completado.....	126
Figura 4.23: esquema de dos esferas en contacto de forma tangencial.....	128
Figura 4.24: segmento cilíndrico añadido a una media esfera.....	128
Figura 4.25: engranes esféricos articulación homocinética.....	129
Figura 4.26: engranes esféricos y su mecanismo de sujeción.....	130
Figura 4.27: diagrama cuerpo libre para el mecanismo de sujeción.....	130
Figura 5.1: diagrama de cuerpo libre del mecanismo final.....	134
Figura 5.2: junta homocinética.....	135
Figura 5.3: ensamble final en su posición inicial.....	136
Figura 5.4: Posición inicial del mecanismo.....	137
Figura 6.1: pieza con entrada de movimiento ortogonal al eje del neumático.....	138
Figura 6.2: gráfica de velocidad angular del sucesor del neumático.....	139
Figura 6.3: eje de entrada de movimiento.....	140

Figura 6.4: gráfica de velocidad angular del eje de entrada de movimiento .....	141
Figura 6.5: elemento de velocidad de salida del mecanismo .....	141
Figura 6.6: velocidad angular del neumático.....	142
Figura 6.7: junta homocinéticas movimiento.....	143
Figura 6.8: velocidad de salida en la junta homocinética .....	143
Figura 6.9: lóbulos como elemento idealizado. ....	145

## CAPÍTULO I

### INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

Hoy en día existe una gran necesidad de vehículos de alta maniobrabilidad, ya sea tanto para operar en ambientes industriales como en ambientes de transporte. Desgraciadamente los vehículos tradicionales cuentan con un rango de trayectorias delimitado, obligando al conductor a aumentar el número de maniobras necesarias para conseguir desplazamientos en ambientes con obstáculos. Pero hay condiciones que demandan un vehículo con capacidad de maniobrar en espacios reducidos con gran precisión y con un uso mínimo de maniobras. Esto sería altamente asequible en un vehículo de tipo “omnidireccional”, los cuales permiten que el vehículo alcance cualquier punto mediante una trayectoria directa, un ejemplo claro de este tipo de vehículos es el prototipo 4WIDIS EV desarrollado por el dr. Ziming Qi el cual se aprecia en la Figura 1.1.



*Figura 1.1: Prototipo 4WIDIS EV [1], [2]*

Como consecuencia de una falta de trayectorias omnidireccionales se crearon las maniobras tipo *drifting* [3] en donde hay un desgaste excesivo en los neumáticos. También se tiene el famoso estacionamiento en paralelo, el cual requiere por lo menos tres maniobras del conductor, requiriendo cierta inteligencia espacial que no todos los conductores logran obtener, y esto es sólo por mencionar sólo algunas de las maniobras generadas debido a la necesidad de trayectorias que no son soportadas por vehículos tradicionales.

Lamentablemente aún no se ha logrado diseñar un vehículo omnidireccional que sea viable de manufacturar a un nivel comercial. Esto muy a pesar de que ya existen varios modelos conceptuales y funcionales de estos mismos. En este documento se conjetura que es debido a la modificación que comúnmente se realiza en el neumático, la cual es la solución más utilizada en sistemas robóticos.

Este tipo de modificaciones en los neumáticos han sido poco prácticos a la hora de usarse en automóviles, debido a que los neumáticos comerciales se encuentran normalizados, Sin mencionar que en algunos casos los neumáticos omnidireccionales no son muy útiles para subir escalones o atravesar brechas y grietas. Esta última limitante se deriva del hecho de que la mayoría de estas llantas cuentan con dos componentes de movimiento, una activa y una pasiva, y que el diámetro de las llantas pasivas es muchísimo menor al diámetro de la llanta omnidireccional en sí. Asimismo, pueden llegar a comprometer la tracción de dicho vehículo.

Dejando de lado el uso de llantas omnidireccionales. Se tiene la tecnología *in wheel* [4] para obtener una gama de movimientos omnidireccionales haciendo uso de neumáticos con motores dentro de sus llantas. Pero muy a pesar del éxito obtenido en el uso de esta tecnología para producir movimiento omnidireccional, parece existir algún tipo de problemática en la fabricación y comercialización de vehículos bajo este tipo de conceptos.

El objetivo de esta tesis es desarrollar un mecanismo que permita un movimiento omnidireccional en un vehículo que utilice llantas convencionales, bajo la conjetura de que si se lograra alcanzar el movimiento omnidireccional sin la necesidad de cambiar la estructura o geometría de las llantas su viabilidad en automóviles comerciales aumentaría. Aumentando de esta forma los estudios sobre dicho tipo de movimientos y sus posibles aplicaciones en diversas circunstancias. Como pudiese ser el absorber parte de la energía de un impacto en forma de rotación, estacionamiento en paralelo de una sola maniobra, rotación del carro sobre un solo punto, realización de maniobras que normalmente involucrarían el uso de derrape, sin necesidad de reducción de velocidad o desgaste de neumático excesivo, por nombrar algunas posibilidades.

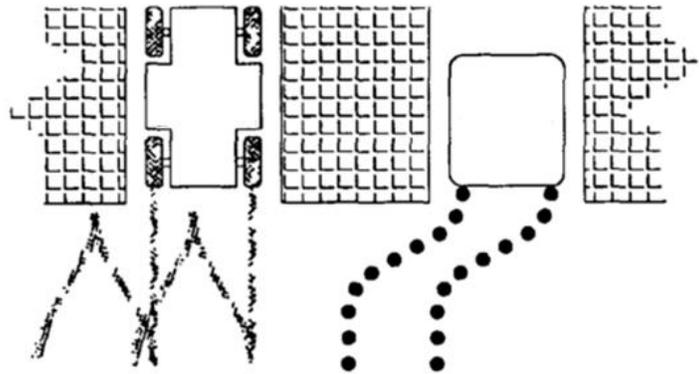
Para esto se desea diseñar un sistema de transmisión de potencia y de dirección que le permita alcanzar una rotación de  $180^\circ$  a las llantas del vehículo, todo esto sin perder de vista que las llantas deben de girar sobre su propio eje vertical para no caer en las limitantes de la geometría de Ackerman [5]. Convirtiéndolo de esta forma en un vehículo omnidireccional. Pero teniendo en mente la idea que la fuente de potencia sería uno, o un par de motores montados en el chasis. Tal como hacen los carros comerciales de hoy en día.

Todo esto bajo la hipótesis de que un sistema análogo a un mecanismo de 4 barras [6], podría ser una solución viable para el sistema de transmisión de potencia. Aunque parece una idea novedosa, desde antaño se han buscado diseños de vehículos capaces de estacionarse en paralelo bajo una sola maniobra, algunos los consiguieron sin hacer uso del movimiento omnidireccional, pero nunca fueron comercializados, y yacen ahora como curiosidades de la historia que en muchos casos ni siquiera fueron patentados, pero algunas investigaciones recientes marcan una tendencia a retomar nuevamente este objetivo en carros conceptuales de tipo eléctrico, tales como las recientes investigaciones del Dr. Tom Qi [1], [5], [7]–[19], además de las investigaciones recientes de la NASA sobre el MRV también conocido como *modular robotic vehicle* por sus siglas en inglés [20].

### **1.1 Movimiento omnidireccional**

Un vehículo omnidireccional se refiere a un vehículo con la capacidad de desplazarse en todas las direcciones sobre el plano que lo sostiene.

A diferencia de un vehículo omnidireccional, un vehículo convencional utiliza un sistema de dirección Ackerman, se puede visualizar la diferencia de trayectorias generadas por vehículos convencionales y omnidireccionales en la Figura 1.2.



*Figura 1.2: trayectorias de maniobras típicas para vehículos convencionales y vehículos omnidireccionales*

[21]

## **1.2 Ventajas de un vehículo omnidireccional**

Los vehículos omnidireccionales tienen grandes ventajas sobre las plataformas con sistema de dirección Ackerman, para moverse en áreas estrechas, pueden desplazarse de lado, girar en un punto y seguir trayectorias complejas. Los robots con esta gama de movimientos son capaces de realizar fácilmente tareas en entornos con obstáculos estáticos y dinámicos, sin mencionar los de entornos angostos.

### **1.3 Llantas omnidireccionales**

La posibilidad de ejecutar desplazamientos omnidireccionales en un robot, se ha atribuido principalmente a los tipos de ruedas utilizadas y su configuración, y no a un sistema de transmisión de potencia, como en esta tesis se desea proponer. Debido a esto se han investigado y desarrollado una cantidad significativa de llantas omnidireccionales. Estos tipos de trabajos previos pueden dividirse principalmente en dos grandes corrientes. La primera de estas corrientes de investigación es el desarrollo de ruedas especiales, que al estar en contacto con la superficie tienen una componente activa y una pasiva que son perpendiculares entre sí. La otra de estas corrientes investiga ruedas similares, pero con dos componentes activas.

### **1.4 Ruedas con componentes pasivo activo**

Se entiende por llantas omnidireccionales, una llanta con la capacidad de rotar sobre dos o más planos perpendiculares entre sí. Si hablamos de un componente de rotación activo nos estaríamos refiriendo a un componente por el cual entra una potencia en forma de rotación, mientras que un componente de rotación pasivo se referiría a un grado de libertad libre, ortogonal al grado de rotación activo, y cuyo fin es reaccionar a las fuerzas que pudieran aplicarse sobre él. A continuación, se procederá a describir algunas de estas llantas.

### 1.4.1 *Omniwheel*

La aplicación de esta patente se realizó el 11 de mayo de 1918 bajo el nombre de *vehicle wheel* [22] por el señor J. Grabowiecki. Hoy en día son conocidas como *omniwheel* o en algunos casos *polywheels*. son ampliamente utilizadas en sistemas de tipo holonómicos<sup>1</sup>.

Su grado de libertad activo es concéntrico al eje de la rueda, mientras que su grado de libertad pasivo es ortogonal a su grado de libertad activo, se puede apreciar un modelo tridimensional de la misma en la Figura 1.3.



Figura 1.3: Llanta *omniwheel* modelada en *solidworks*

Una plataforma que utilice tres llantas *omniwheel* en una configuración triangular generalmente es llamada *kiwi drive*. Aunque es posible conseguir una plataforma similar sin el uso de llantas tipo *omniwheel*. Esta configuración es llamada plataforma *Killough* [23], y al igual que el *kiwi drive* utilizó un arreglo triangular, pero la diferencia recae en el uso de dos llantas tradicionales en vez de una llanta *omniwheel*.

---

<sup>1</sup> se dice que un sistema es holonómico cuando el número de grados de libertad controlables es igual a los grados totales de libertad.

### 1.4.2 Mecanum

La llanta *mecanum* [24] es a veces llamada la llanta de Ikon por su inventor Bengt Erland Ikon, a quien se le ocurrió la idea mientras era un ingeniero que trabajaba para la compañía *mecanum ab*, la patente fue registrada el 13 de noviembre de 1972, con el título de “*Ruedas para un vehículo estable, autopropulsado, móvil, en cualquier dirección deseada en el suelo o en alguna otra base*”, la Figura 1.4 muestra un modelo de este tipo de llantas.

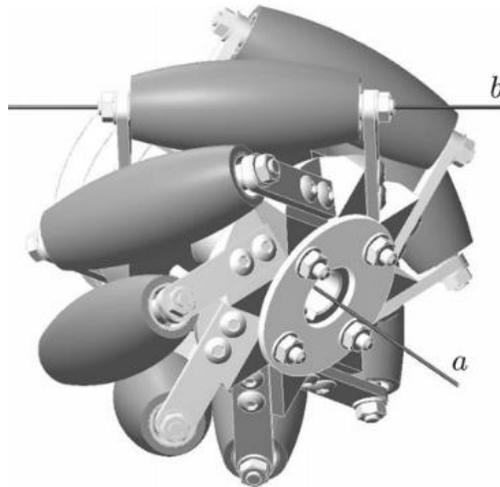


Figura 1.4:llanta mecanum wheel [25]

Se puede considerar como una llanta convencional con una serie de rodillos sujetos a su circunferencia. Esto rodillos están situados típicamente en un eje de rotación a  $45^\circ$  del plano de la llanta, además de  $45^\circ$  de una línea que atraviesa el centro del rodillo y que es paralela al eje de rotación de la llanta. Además de moverse hacia delante y hacia atrás como llantas convencionales, permita el movimiento lateral cuando rotan un par de llantas en direcciones opuestas [25].

### 1.4.3 *Wesnwesn*®

La llanta *wesnwesn* se puede considerar como un mecanismo similar al de las llantas *omniwheel*, pero las llantas con componentes pasivo están en forma de cono. Son ajustadas y alineadas en un único riel perimétrico, sepa apreciar un ejemplar de este tipo de llantas en la Figura 1.5.

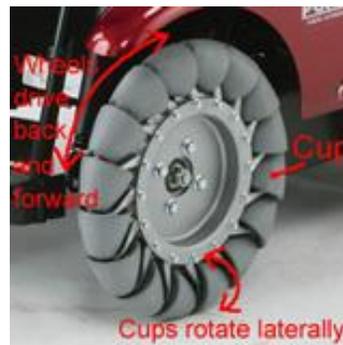


Figura 1.5: llanta *wesnwesn* [26]

*toyota motors east japan, inc* tiene un producto de nombre *patrafour* [26], el cual hace uso de las llantas *wesnwesn*, en su sitio web se pueden observar videos del *patrafour* en acción. El cual es una silla de ruedas inteligente para adultos mayores, en la Figura 1.6 se muestra una fotografía de un ejemplar en uso.



Figura 1.6: silla omnidireccional *patrafour* [26]

### 1.4.4 Flexiwheel

Esta llanta omnidireccional fue patentada por Fuji Shinichiro [27], bajo el nombre de rueda de movimiento omnidireccional, al igual que los ejemplos anteriores su componente activa es concéntrica al eje de la rueda. Mientras que su componente pasiva proviene de tubos flexibles que tiene la capacidad de deformarse mientras realizan un movimiento de forma lateral, en la Figura 1.7 podemos apreciar una fotografía y un esquema de este tipo de llanta.

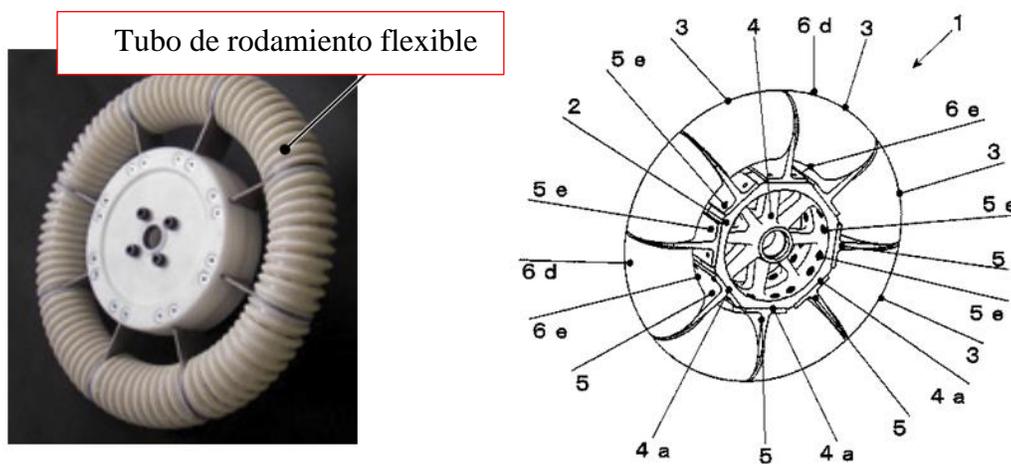


Figura 1.7: *laquos wheel* [28] y esquema de patente [27]

En el trabajo de Kenjiro Tadakuma [28] se hace referencia esta llanta bajo el nombre de *laquos wheel*, pero parece ser el único trabajo que llama de esta forma a esta llanta, por lo que para clasificarla de una forma rápida en este trabajo se le denominará *flexiwheel* debido a su capacidad de deformación.

### 1.4.5 Omniball

La estructura de la *omniball* [29] es simple comparada con otro tipo de llantas omnidireccionales, pero este mecanismo tiene un punto singular cuando el plano que contiene los tres ejes de esta llanta (uno para rotación activa y los otros dos para rotación pasiva) se vuelven perpendiculares al piso como se muestra en la Figura 1.8.

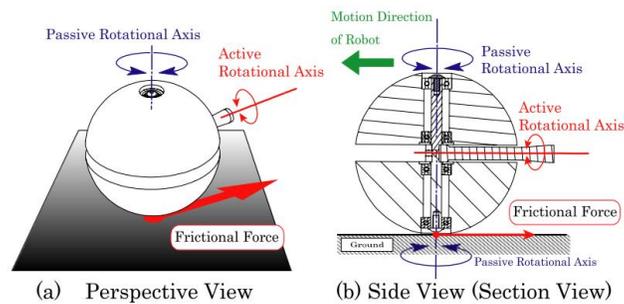


Figura 1.8: vista seccionada de omniball [29]

En este estado la llanta hemisférica no puede rotar. Para resolver el problema de singularidad una llanta en forma de barril con rotación pasiva es colocada al final del eje de la llanta hemisférica con rotación pasiva, eliminando el punto de singularidad como se muestra en la Figura 1.9.

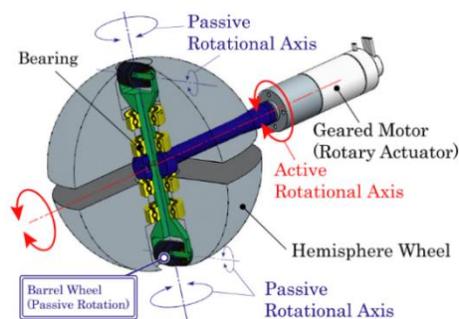


Figura 1.9: Estructura de omniball [29]

## 1.5 Ruedas con dos componentes activos

La otra corriente de investigación sobre ruedas omnidireccionales ha llevado al desarrollo de ruedas con dos componentes de dirección activas, controlando el eje que normalmente es pasivo y de esta forma el movimiento lateral, ejemplos de este tipo de ruedas son las que mencionaremos a continuación.

### 1.5.1 Omnicrawler

El concepto básico propuesto por Tadakuma Kenjiro y asociados [30] se puede apreciar en la Figura 1.10.

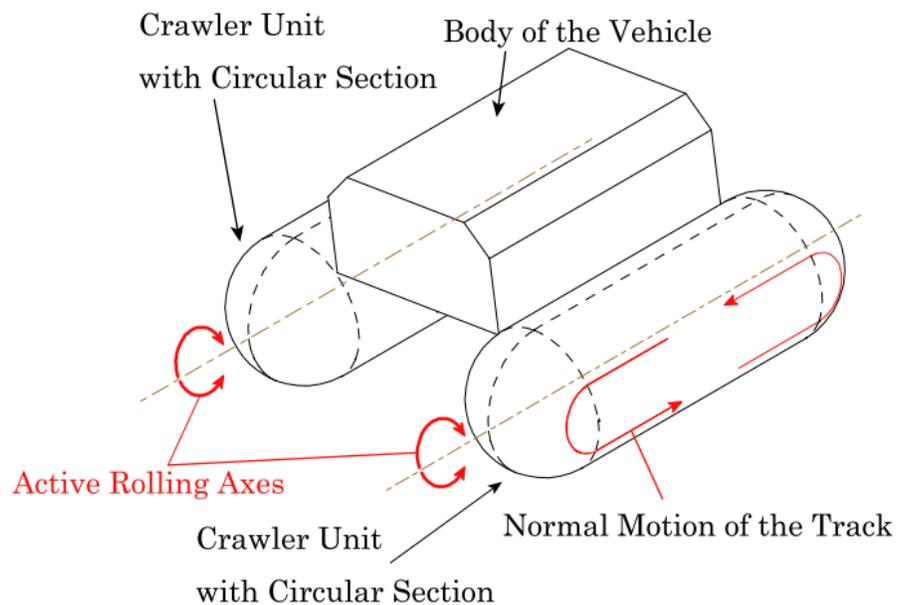


Figura 1.10: esquema básico de omnicrawler [30]

El módulo tipo llanta de oruga tiene un eje de rotación activo que permite realizar el movimiento lateral requerido. Cabe mencionar que el *omnicrawler* es una extensión del *omniball*, pasando desde una esfera a un cilindro con orillas esféricas. Desde una vista frontal los dos mecanismos son exactamente iguales. En cambio, la diferencia es evidente cuando analizamos la vista superior

Mientras que la superficie de la *omniball* consistía en dos hemisferios sólidos, la superficie del *omnicrawler* está compuesta por un cinta transportador, el cual corre tanto por el cilindro como por las orillas esféricas, este concepto se puede visualizar en la Figura 1.11.

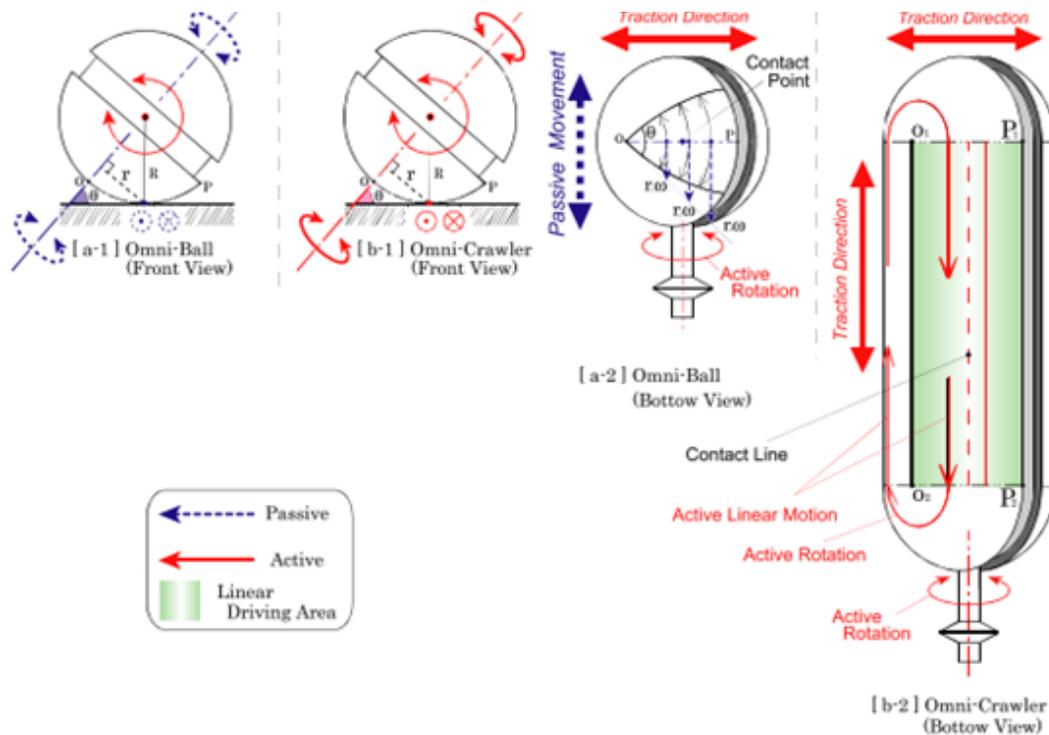


Figura 1.11: principio básico del omnicrawler [30]

### *1.5.2 Liddiard wheel*

Estas llantas fueron desarrolladas por el inventor canadiense William Liddiard [31] incluyen un rin y neumático especiales en su diseño. El rin consta de dos platos que incluyen rodillos que pueden rotar de forma libre y que se encuentran montados alrededor del perímetro de los platos del rin, se muestra una fotografía de este tipo de neumáticos en la Figura 1.12.



*Figura 1.12: liddiard wheel [31]*

Rodamientos motorizados son instalados en el eje del rin. Cuando se activan los motores hacen rodar los rodamientos que a su vez hacen rodar la llanta de una forma horizontal.

La llanta incluye un miembro con la forma de un toroide en su centro, el cual carga múltiples rodillos. Además, la llanta de plástico también tiene la forma de un toroide. La llanta de plástico se monta sobre el rin. Los rodamientos locos también giran cuanto la llanta gira proveyendo de esta forma soporte a la llanta. Cuando todas las llantas rotan en la misma dirección el vehículo que las utilice se mueve en esa dirección. Cuando las llantas delanteras rotan en una dirección contraria las traseras se genera una rotación sobre el eje central del vehículo. Una unidad de llantas *liddiard* cuenta con dos unidades descritas.

### 1.5.3 Ballwheel

El término *ballwheel*[32], se refiere a cualquier dispositivo que soporte el chasis de algún vehículo sobre una llanta esférica. De tal forma que el chasis pueda rodar en cualquier dirección sobre el piso. La Figura 1.13 y la Figura 1.14 ilustran este concepto.

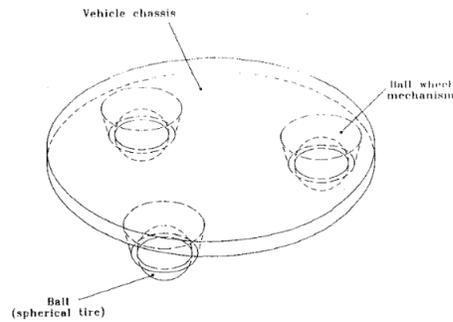


Figura 1.13: esquema de un chasis soportado por tres ballwheel[32]

Debido a la simetría y simplicidad de la estructura las llantas esféricas exhiben cualidades adecuadas para vehículos omnidireccionales.

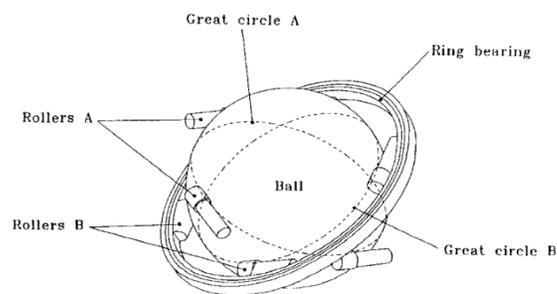


Figura 1.14: diseño inicial del mecanismo ballwheel [32]

El trabajo de M. West y H. Asada sugiere la posibilidad de un diseño en donde el peso del chasis del vehículo es soportado por una llanta esférica, la cual hace contacto por medio de rodillos cuyos ejes están fijos directamente al chasis. Esto se ilustra más claramente en la Figura 1.15.

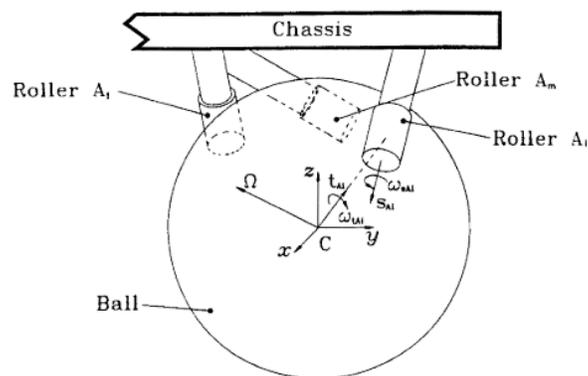
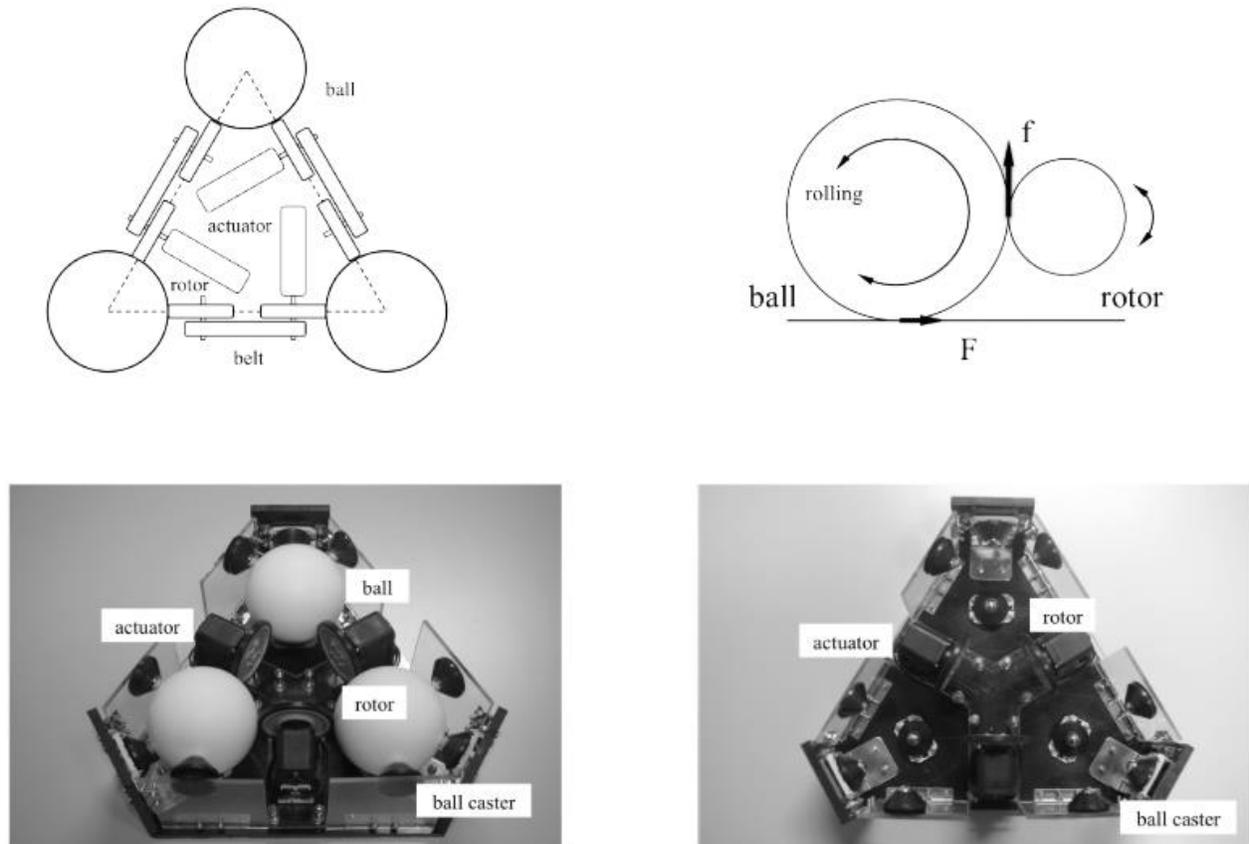


Figura 1.15: diseño genérico tipo a de ballwheels [32]

Este trabajo fue aplicado por Shuichi Ishida, y Hiroyuki Miyamoto en su proyecto *ball wheel drive mechanism* [33], del cual podemos ver algunos de sus esquemas y prototipo final en la Figura 1.16. Su trabajo consistía en desarrollar un vehículo omnidireccional que utilizara *ballwheels*. Optando por tres de estas llantas para construir el mecanismo, el cual cuenta con tres grados de libertad sobre una superficie plana.

La dirección de la rotación de cada llanta crea una componente de movimiento, que en conjunto generan una componente de movimiento total del vehículo.



*Figura 1.16: esquema del mecanismo de transmisión y vista en perspectiva de un robot omnidireccional que usa ballwheels [33]*

Debido a que tienen tres llantas y con tres puntos de contacto se puede sujetar un objeto, el derrape de este vehículo es poco probable a menos de que exista un desgaste en el neumático.

### 1.5.4 Sistema *acrobat*

El sistema *acrobat* fue desarrollado por M. Wada, T. Hirama, y Y. Inoue [34]. Los cuales estudiaron sobre las fuerzas de tracción en un sistema de transmisión que involucraba dos esferas como elementos del mecanismo. Podemos apreciar la estructura del *acrobat* en la Figura 1.17.

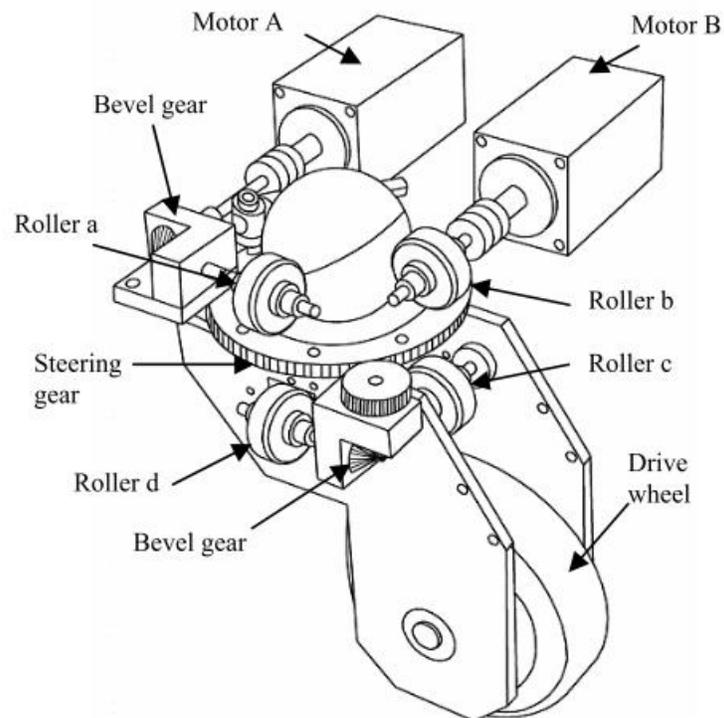


Figura 1.17: una transmisión de doble bola motorizada [34]

De esta investigación se concluyó que existía una pérdida de potencia en el sistema *acrobat*. Por el deslizamiento que podía generarse entre las esferas hechas de plástico. Pero a pesar de esto sigue teniendo los tres grados de libertad necesarios para desarrollar un movimiento omnidireccional.

### 1.6 tecnología *in wheel*

Desafortunadamente las dos corrientes de investigación de llantas anteriormente mencionadas, se vuelven imprácticas cuando hablamos de implementación en un vehículo convencional.

Lo que nos lleva otro tipo de investigación, el cual busca el uso de llantas convencionales para la generación de movimiento omnidireccional. Como la que fue dirigida por el Dr. Tom Qi desde principios del 2011 a principios del 2015 [1], [5], [7]–[19] haciendo uso de la tecnología *in wheel* [35] para lograr el movimiento omnidireccional, podemos observar en detalle uno de los neumáticos que desarrolló en la Figura 1.18.



*Figura 1.18:* Llanta Del Vehículo Omnidireccional Desarrollado Por El Dr. Tom Qi [1]

La tecnología *in wheel* consiste en acoplar directamente un motor a la llanta y su característica más notable sería que al tener el motor dentro de la llanta no existiría un sistema de transmisión de potencia, y al no existir un sistema de transmisión de potencia tendríamos cero pérdidas por transmisión a la llanta. Siendo este el mayor atractivo de esta tecnología.

Algunos puntos que hay que cuidar de la tecnología *in-wheel* serían que en la mayoría de los casos se aumentaría la masa que el amortiguador carga, lo cual va en contra del concepto automotriz *unspring mass*, el cual consiste en reducir en medida de lo posible la masa que debe cargar el amortiguador. La razón de esto es simple, ha mayor masa se genera una mayor oscilación en un sistema resorte masa analógico.

Otros posibles puntos a cuidar en sistemas *in-wheel* serían los posibles daños que se ocasionarían al motor dentro de la llanta debido a: irregularidades del camino, contacto con agua en caso de pasar sobre superficies mojadas, y los problemas de corrosión que se puedan presentar.

La patente más antigua que se encontró en esta investigación y que hacía alusión a la tecnología *in wheel* fue la publicada por W. Adams el 24 de junio de 1884, bajo el nombre de *electric motor* [4], del cual podemos ver una ilustración en la Figura 1.19.

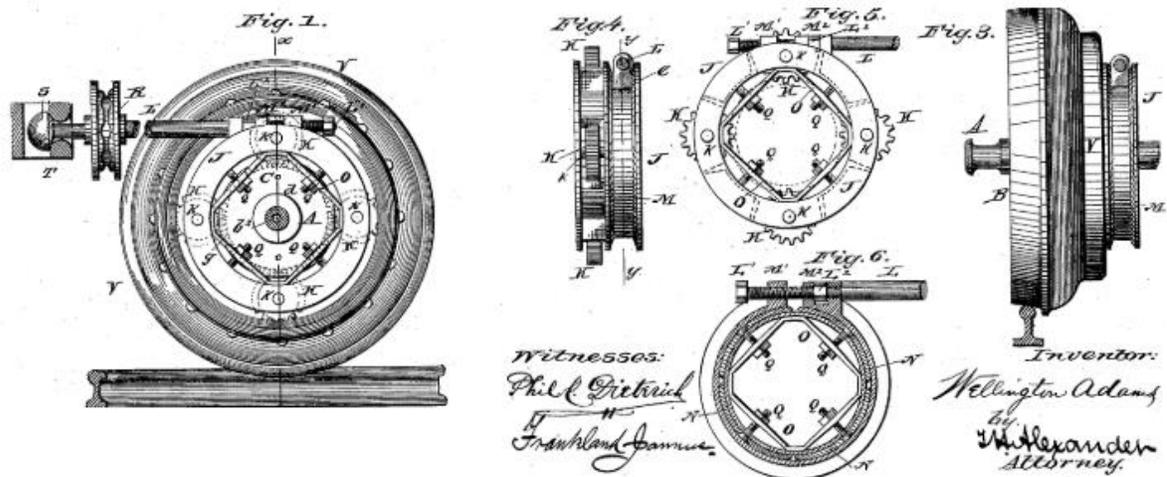


Figura 1.19: esquemas de la patente electric motor [4]

### ***1.7 Modular robotic vehicle***

Cuando se logra sobrellevar todos los puntos anteriormente mencionados sobre la tecnología *in wheel*, pudiéramos pensar que es posiblemente la forma más eficiente de obtener movimiento omnidireccional en un vehículo, tal como se puede apreciar en el *modular robotic vehicle* también conocido por sus siglas en inglés *VRM*, el cual fue desarrollado por la *NASA* el 21 de julio de 2015 [20], se muestra una fotografía del *VRM* en la Figura 1.20.



*Figura 1.20: fotografía del modular robotic vehicle [36]*

*El modular robotic vehicle (mrv) es un vehículo diseñado para transporte en áreas congestionadas. Es relativamente pequeño y fácil de maniobrar y estacionar.*

Además, el *MVR* también fue diseñado sin una transmisión conectada a un motor de combustión principal y tampoco tiene conexiones mecánicas directas entre los dispositivos de entrada y los actuadores utilizados para acelerar, frenar o derrapar el carro. Los dispositivos principales del vehículo están localizados en las esquinas del vehículo de una forma modular, a cada uno de estos módulos se le denomina *ecorner* por sus siglas en inglés *corner assembly*. Debido a que el *MRV* usó un sistema de control por medio de cables, el peso y el espacio del vehículo son perfilados de una forma sustancial comparados con otros diseños convencionales. Además, las diferentes capacidades funcionales que son provistas individualmente por cada *ecorner* permiten el control de vehículo en una variedad de modos de operación. Por ejemplo, el modo de conducción puede ser intercambiado para que las cuatro llantas se muevan en la misma dirección, obteniendo así movimiento omnidireccional. En la Figura 1.21 se puede apreciar el diagrama explosionado del *MVR*.

- Design speed: 64 kph (40 mph)
  - Currently computer limited to 25kph (15mph)
- Curb weight: 900 kg (2000 lb)
- Footprint: 2.15 x 1.55m (7' x 5')
- Drive-by-wire without mechanical backup

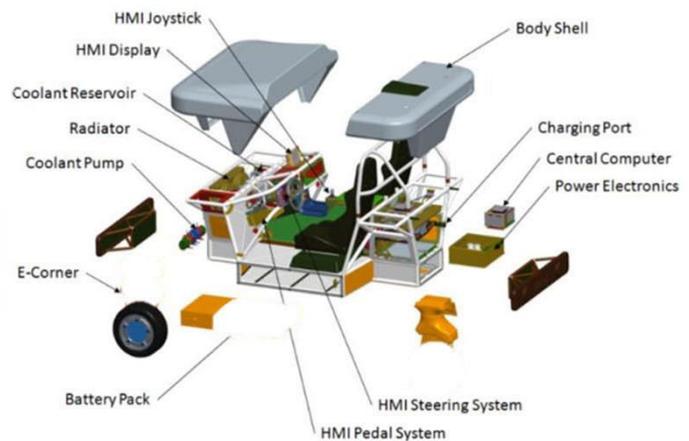


Figura 1.21: diagrama explosionado del *MVR* [36]

Mientras que otro posible modo de operación pudiera ser el colocar todas las llantas del vehículo de una forma perpendicular al centro del vehículo, permitiendo de esta forma una rotación alrededor de su centro geométrico. También es posible hacer maniobras de conducción como el estacionamiento en paralelo girando las llantas noventa grados y conduciendo hacia un espacio disponible de forma lateral. En la Figura 1.22 se muestra una fotografía del *MVR* mientras se realizaban las maniobras mencionadas.



*Figura 1.22: captura del MVR en un video de CNN [37]*

El conductor puede escoger entre conducir el vehículo de una forma convencional con un volante, o añadir entradas a través de un joystick multi eje para tener un control adicional. El vehículo tiene sus motores de propulsión dentro de cada módulo *ecorner*, y cada uno tiene la capacidad de proveer 190 pies-libra de torque y una velocidad máxima de 40 millas por hora. Un ciclo de control térmico activo mantiene la temperatura de estos motores de alta potencia, mientras que otro enfría los paquetes de baterías de litio-ion. Finalmente cabe mencionar que también cuenta con una capacidad de control remoto.

## CAPÍTULO II

### MARCO TEÓRICO

#### 2.1 Geometría de Ackermann

La geometría de Ackerman, es un mecanismo de dirección que fue inventado por Erasmus Darwin<sup>2</sup> en 1760 para su implementación en el carruaje del príncipe Edward, duque de York. El cual nunca pudo utilizarlo debido a que murió a la edad de 28 años en Múnaco en 1767, y fue de esta forma que quedó en el olvido. No fue hasta más de 50 años después que alguien se le ocurriría la misma idea. Esta persona sería George Lankensperger de Bavaria en 1818, el cual conocería a Rudolph Ackermann mientras este último viajaba a Bavaria, el cual ya gozaba de fama debido a su habilidad como dibujante, George Lankensperger le encargaría a Ackerman el realizar los dibujos para la patente de su invento en Londres. El cual accedió de forma muy amable, dejando registrada la patente no. 4212 (1818). Pero de una forma muy hábil, Ackerman tituló la patente como: “*specification of rudolph ackermann for axeltree.*” Dentro de la patente Ackerman admite que la invención le fue comunicada por George Lankensperger. Como sea esta aclaración fue poco notada y Lankensperger fue olvidado casi por completo, con el paso del tiempo el mecanismo se conoció en los tiempos modernos como geometría de Ackerman.

---

<sup>2</sup> Erasmus Darwin plasmó la idea de la evolución biológica en su libro ZOOMOMIA y en el último de sus poemas largos “THE ORIGIN OF SOCIETY”, pero el trabajo de convencer al mundo de sus ideas evolutivas fue dejado a su nieto Charles Darwin.



sugerencias de Edgeworth y escribió para preguntar a Darwin sobre su método de dirección mejorada.

Darwin contestó el 8 de marzo de 1766, diciendo que le preocupaban los defectos que tenían en común los carruajes ligeros de hacía siete u ocho años, y en ese tiempo contribuyó con un nuevo diseño haciendo el modelo que ha prevalecido desde entonces. El escribió en esta carta:

*“Then three years ago I made a Phaeton on this principle, and have rode in it, I dare conjecture, above 10,000 miles and it is yet a good one, and weighs but 500. About two years ago I made a Post Chaise on this principle, and have rode in that I dare say 10,000 miles and found no inconvenience from the new manner of turning in either of them.” [39]*

De modo que completó pruebas de 10,000 millas sobre camino, en los diferentes carruajes durante los años de 1763 a 1766, los cuales aparentemente fueron un éxito. Darwin especifica los defectos en particular sobre el diseño de los carruajes de la época. Primero, el método de dirección era por medio de rotar el eje frontal y votando por su centro, las llantas frontales tenían que ser considerablemente pequeñas para que el eje pudiera rotar bajo el peso del carruaje, el hecho de que las llantas fueran pequeñas obligaba a que la parte frontal del carruaje se levantara sobre piedras u otros obstáculos del camino, produciendo golpeteos continuos que lastimaban tanto a los caballos como los pasajeros por lo que llantas más grandes eran preferibles. El segundo defecto era el peligro de volcarse, en un carruaje convencional con rotación del eje frontal, Darwin nos dice que la base sobre la cual se soporta el carruaje cambia de un rectángulo un triángulo si la vuelta es severa, y proveía en su carta un diagrama que mostraba el área con cuatro soportes se convertía en una de tres soportes, todos estos puntos resaltan a la vista en el esquema mostrado en la Figura 2.2.

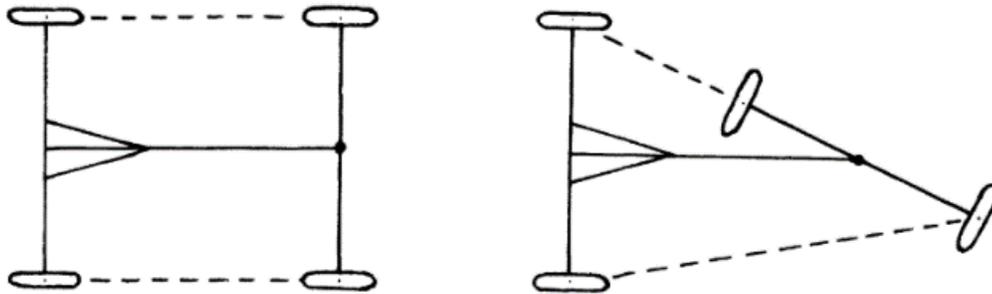


Figura 2.2: bocetos basados en las cartas de darwin por desmond king hele [38]

El nuevo diseño de Darwin eliminaba ambos defectos convirtiéndolos en ventajas. Manteniendo el eje frontal fijo, y haciendo que las llantas saltaran en pequeños ejes que estaban sujetos de cierta forma al eje frontal, permitiendo la construcción de llantas más grandes porque no tenían que balancearse bajo el peso del carruaje, manteniendo en todo momento un área de cuatro soportes como se puede apreciar en la Figura 2.3.

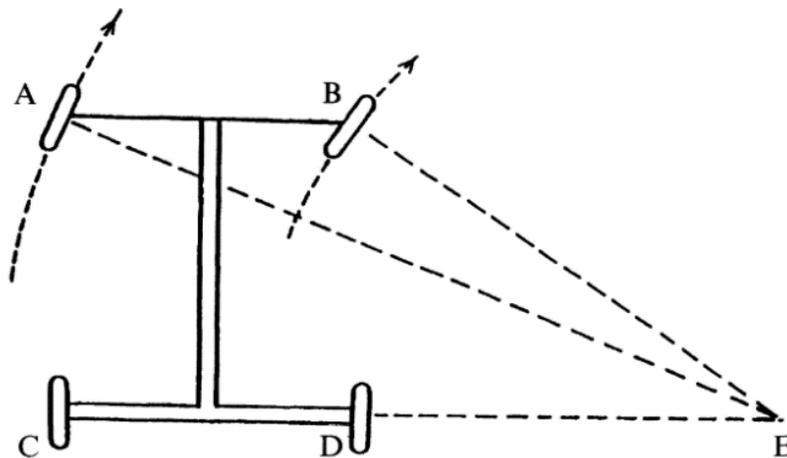


Figura 2.3: criterio de darwin para una buena dirección [38]

**2.1.1 Cálculo de la posición del centro de giro en geometría de Ackermann.**

Si se toma en cuenta la geometría de Ackerman, en un momento en que el vehículo se mueve en una trayectoria recta, se podría apreciar una barra frontal de longitud “L”, una barra de control con una longitud mayor “c”, dos barras laterales con una longitud compartida “y”, además de una inclinación que genera un ángulo  $\alpha$ , como se muestra en la Figura 2.4.

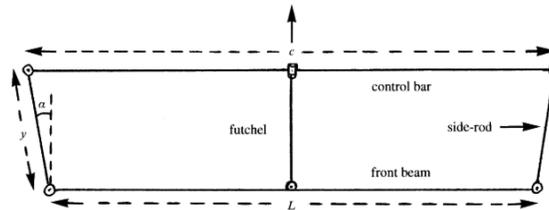


Figura 2.4: diagrama de geometría de ackerman durante un viaje recto [38]

Si analizamos la Figura 2.4 podemos llegar como conclusión que:

$$2y \sin \alpha = c - L \tag{2-1}$$

Cuando el carro trata de girar, se genera un nuevo esquema que se muestra en la Figura 2.5.

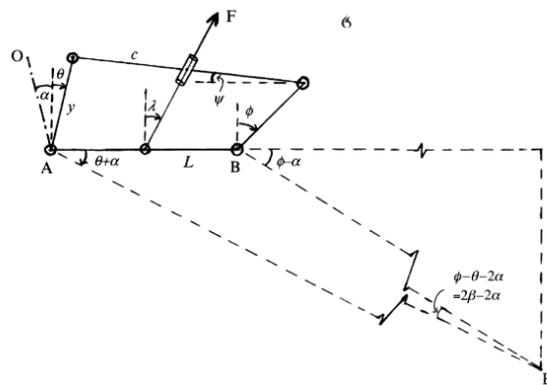


Figura 2.5: diagrama de geometría de ackerman durante una vuelta [38]

El ángulo de giro como se muestra en la Figura 2.5 es “ $\lambda$ ”, y se define por medio de la línea del tiro de la carreta y la línea que es perpendicular al eje frontal, los ángulos definidos por esta última línea, y las barras laterales tanto izquierda como derecha, son expresadas como “ $\theta$ ” y “ $\phi$ ” respectivamente. De modo que puede ser demostrado que:

$$\lambda = \frac{1}{2}(\theta + \phi) \quad (2-2)$$

Para explicar el movimiento rotatorio de la estructura articulada mientras “ $\lambda$ ” varía, es recomendable introducir una variable auxiliar a la que se nombrará “ $\beta$ ”, de modo que:

$$\beta = \frac{1}{2}(\theta - \phi) \quad (2-3)$$

Para expresar las variables “ $\lambda$ ”, “ $\phi$ ”, y “ $\theta$ ” en términos de “ $\beta$ ”, podemos deducir desde la ecuación (2-2) y (2-3):

$$\phi = \lambda + \beta \quad (2-4)$$

$$\theta = \lambda - \beta \quad (2-5)$$

Si el ángulo entre la barra de control y el eje frontal se denomina por “ $\psi$ ”, entonces se pueden definir las ecuaciones horizontales y verticales desde un punto de vista del segmento “ $AB$ ” de la siguiente manera:

$$c \cos \psi = L - y \sin \theta + y \sin \phi \quad (2-6)$$

$$c \sin \psi = y \cos \theta - y \sin \phi \quad (2-7)$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones (2-6) y (2-7), además de utilizar las ecuaciones (2-4) y (2-5) se encuentra que:

$$c^2 - L^2 = 4yL \sin \beta \cos \lambda + 4y^2 \sin^2 \beta \quad (2-8)$$

El siguiente paso sería eliminar la variable “y” haciendo uso de las ecuaciones (2-1) y (2-8):

$$\cos \lambda = \frac{c + L \sin \alpha}{2L} \frac{1}{\sin \beta} - \frac{c - L \sin \beta}{2L} \frac{1}{\sin \alpha} \quad (2-9)$$

De modo que si se tienen valores específicos para las variables “c” “L” y “α”, el valor de la variable “λ”, puede ser encontrado para cualquier valor asignado a la variable “β” mientras que las variables “θ” y “φ” pueden ser obtenidas a partir de las ecuaciones (2-4) y (2-5). Definiendo así todas las variables que se involucran en la geometría de la vuelta.

El siguiente paso será calcular la posición del centro de giro “E” el cual se puede apreciar en la Figura 2.3, y la distancia del centro de giro al eje frontal se denomina como “h”, (ver Figura 2.5)

Para calcular “h” se puede asumir que las llantas están unidas a las barras laterales en puntos muy cercanos a “A” y “B”. Como se puede apreciar en la Figura 2.5. Las líneas de los ejes de las dos llantas, giran junto a las barras laterales, de modo que la línea “ $\overline{AE}$ ” tiene una inclinación con un ángulo de “ $\theta + \phi$ ”, mientras que la línea “ $\overline{BE}$ ” tiene un ángulo de inclinación “ $\theta - \phi$ ”.

Si aplicamos la ley de los senos para el triángulo “ABE”, se tiene que:

$$L \sin(\theta - \phi) = \overline{AE} \sin(2\beta - 2\alpha) \quad (2-10)$$

Y también:

$$h = \overline{AE} \sin(\theta + \alpha) \quad (2-11)$$

Dividiendo la ecuación (2-11) entre la ecuación (2-10) se obtiene que:

$$\frac{h}{L} = \frac{\sin(\theta + \alpha) \sin(\theta - \phi)}{\sin(2\beta - 2\alpha)} = \frac{\sin(\lambda) \sin(\beta - \alpha)}{\sin(2(\beta - \alpha))} \quad (2-12)$$

Entonces para cualquier valor de “ $\beta$ ”, el valor de “ $\lambda$ ” puede ser calculado desde la ecuación (2-9) mientras que la relación “ $\frac{h}{L}$ ” es calculado desde la ecuación (2-12) hay que notar que la ecuación (2-12) no da un valor determinado para “ $\frac{h}{L}$ ” cuando el vehículo se mueve en una línea recta, en otras palabras, cuando “ $\beta = \alpha$ ” y “ $\lambda = 0$ ”.

Si se desea encontrar el valor de la relación “ $\frac{h}{L}$ ” cuando “ $\lambda$ ” tiende a cero, se usa la ecuación (2-9) para expresar “ $\beta$ ” como una serie de potencias de “ $\lambda$ ”, esto da como resultado:

$$\beta = \alpha + \frac{L}{2c} \tan \alpha \lambda^2 + \frac{L \tan \alpha}{8c} \left( \left( \frac{L}{c} \right)^2 + \frac{L}{c} \sec^2 \alpha - \frac{1}{3} \right) \lambda^4 + O(\lambda^6) \quad (2-13)$$

Substituyendo la ecuación (2-13) en la ecuación (2-12) se obtiene:

$$h = c \cot \alpha \left( 1 - \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{L}{c} \right) \sec^2 \alpha \right) \lambda^2 + O(\lambda^4) \quad (2-14)$$

Por lo tanto “ $h$ ” es aproximadamente igual a “ $c \cot \alpha$ ” Para valores pequeños de “ $\lambda$ ”.

## 2.2 Mecanismo de cuatro barras.

Un mecanismo de cuatro barras [6] es un ensamble de cuatro eslabones y cuatro juntas interconectadas, de modo que forman un cuadrilátero articulado que produce un movimiento controlado en respuesta a un movimiento suministrado, debido a que uno de sus eslabones está asegurado mientras que los tres restantes son móviles. Entendiendo por eslabón cualquier elemento rígido y que es virtualmente incompresible, como pudiese ser una barra de algún material duro y que poseen por lo menos dos nodos que son puntos de unión con otros eslabones. Dichos nodos sirven para realizar juntas, que son conexiones entre dos o más eslabones y que permiten algún movimiento, o movimiento potencial entre los elementos conectados.



*Figura 2.6: mecanismo de cuatro barras formado para propulsar una bicicleta [40]*

El mecanismo de cuatro barras es el eslabonamiento articulado más simple posible para generar movimiento controlado con un grado de libertad. También es extremadamente variado en función de los tipos de movimientos y trayectorias que puede generar, además de ser el principio por el cual se propulsan las bicicletas como se aprecia en la Figura 2.6.

### 2.2.1 Ley de Grashof.

La ley de Grashof [6] es una condición que se utiliza para analizar el tipo de movimiento que hará el mecanismo de cuatro barras: para que exista un movimiento continuo entre las barras, la suma de las longitudes de las barras más cortas y larga no puede ser mayor que la suma de las barras restantes, esto se puede representar con la ecuación (2-15).

$$S + L \leq P + Q \quad (2-15)$$

Donde  $S$  representa la longitud del eslabón más corto, mientras que  $L$  representa la longitud del eslabón más largo, definiendo de esta forma la primera parte de la desigualdad. Mientras que en el otro lado de la desigualdad se tiene que  $P$  representa la longitud de uno de los eslabones restantes, asimismo  $Q$  representa la longitud del último eslabón del mecanismo que aquí se presenta.

### 2.2.2 Clasificación de movimientos

Antes de entrar de lleno a la clasificación de los movimientos de un mecanismo de cuatro barras, se tiene que mencionar la existencia de cuatro posibilidades de movimiento para las barras de entrada y de salida del sistema o mecanismo. Las cuales pueden ser; manivela (este tipo de movimiento describe una rotación de  $360^\circ$ ), balancín (este es un tipo de rotación delimitada en un rango de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ ), balancín tipo cero (a diferencia de un balancín normal el rango de rotación puede incluir el ángulo  $0^\circ$  más no el de  $180^\circ$ ), y finalmente el balancín tipo pi

(este tipo de balancín tiene un rango de rotación que incluye el ángulo  $180^\circ$  pero no incluye el ángulo de  $0^\circ$ ).

Ahora bien, si se define la longitud de la barra de entrada como  $A$ , la longitud de la barra de salida como  $D$ , la longitud de la barra flotante como  $B$ , y por último se define la longitud de barra que normalmente es imaginaria (o aterrizada tierra) con una longitud  $C$ . Se pueden generar tres condiciones que serán dependientes de las longitudes que se han definido para cada una de las cuatro barras del mecanismo.

$$T_1 = B + C - A - D \quad (2-16)$$

$$T_2 = B + D - A - C \quad (2-17)$$

$$T_3 = D + C - A - B \quad (2-18)$$

Dependiendo del signo del resultado de cada una de estas condiciones, se puede tener diferentes combinaciones de movimiento entre la barra de entrada y la barra de salida de las cuales destacan ciertas configuraciones como la configuración de deltoide con corneta, en donde tanto a la barra de entrada como la de salida tienen revoluciones completas, esto se ejemplifica en la Figura 2.7.

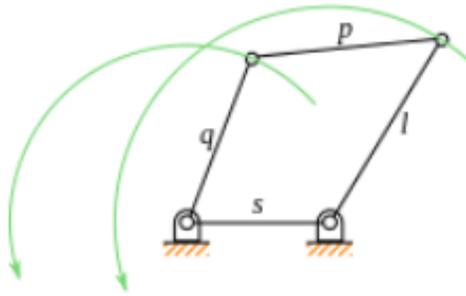


Figura 2.7: configuración deltoide con corneta [6]

La configuración manivela balancín destaca por tener en su entrada revoluciones completas mientras que en su salida oscilará pivotando sobre su bancada, como se puede ver en la Figura 2.8.

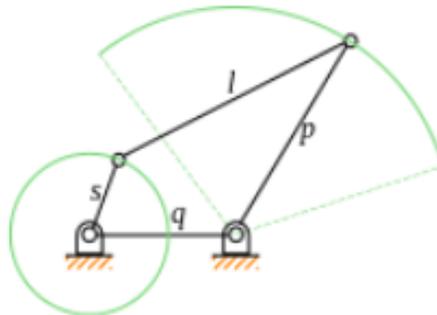


Figura 2.8: configuración manivela-balancín [6]

Un mecanismo de doble manivela es aquel en donde ambas barras pivotan sobre sus respectivas bancadas, como se muestra en la Figura 2.9.

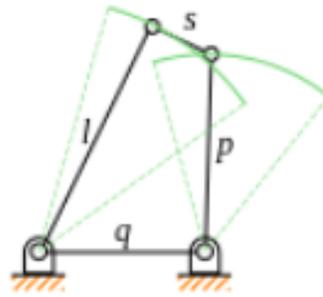


Figura 2.9: configuración balancín-balancín [6]

La configuración de paralelogramo duplica con exactitud el movimiento rotatorio de la manivela de entrada a la manivela de salida, haciendo de esta configuración una particularmente útil en el diseño de mecanismos, esta configuración se muestra en la Figura 2.10.

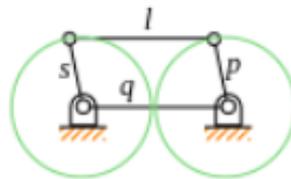


Figura 2.10: configuración de paralelogramo [6]

En este momento se tienen las herramientas necesarias para poder clasificar las diferentes posibilidades del movimiento de la barra de entrada y la barra de salida. Haciendo uso de las tres condiciones  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$  como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1: posibilidades de movimiento en un sistema de cuatro barras

$T_1$	$T_2$	$T_3$	Condición de Grashof	Barra de entrada	Barra de salida
-	-	+	Cierto	Manivela	Manivela
+	+	+	Cierto	Manivela	Balancín

+	-	-	Cierto	Balancín	Manivela
-	+	-	Cierto	Balancín	Balancín
-	-	-	Falso	Balancín-0	Balancín-0
-	+	+	Falso	Balancín- $\pi$	Balancín- $\pi$
+	-	+	Falso	Balancín- $\pi$	Balancín-0
+	+	-	Falso	Balancín-0	Balancín- $\pi$

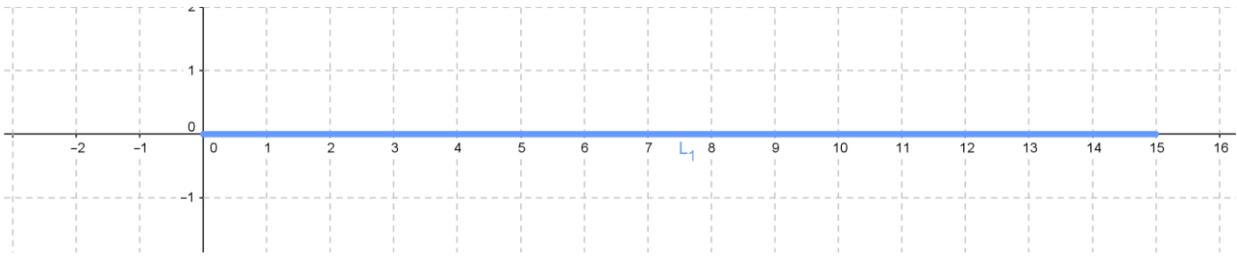
---

**Nota:** los casos en donde  $T_1$ ,  $T_2$  o  $T_3$  son igual a cero, son interesantes porque significan en algún momento el mecanismo tendrá una configuración de barras cruzadas, abriendo 27 diferentes posibilidades de que esto ocurra.

En síntesis, se puede clasificar un mecanismo de cuatro barras en una de tres categorías; convexo, cóncavo y cruzado. Tanto en la clasificación convexa como la cóncava ninguna barra se cruza con otra. Mientras que la clasificación cruzada en algún momento al menos dos barras se cruzarán. En la configuración convexa el ángulo inferior de todas las esquinas del cuadrilátero formado será menor a  $180^\circ$ , y la clasificación cóncava al menos uno de los ángulos interiores será mayor a  $180^\circ$ .

### 2.2.3 Esquema del mecanismo de cuatro barras

Para comenzar el análisis se supone un plano cartesiano con origen en la barra fija imaginaria, la cual se nombra como  $L_1$ , además se encontrará orientada de forma horizontal y alineada con el eje X. tal como se muestra en la Figura 2.11, es importante notar que existirá un ángulo conceptual llamado alfa el cual tendrá un valor de  $0^\circ$ .



*Figura 2.11: Esquema 1 del mecanismo de cuatro barras*

Ahora se ubica en los extremos de la barra  $L_1$  los puntos  $A$  y  $D$ , los cuales sirven para visualizar dichas articulaciones, como se puede apreciar en la Figura 2.12.

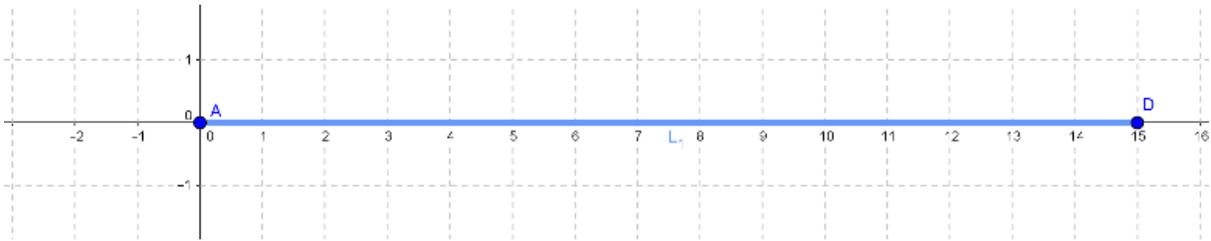


Figura 2.12: Esquema 2 del mecanismo de cuatro barras.

Lo siguiente será definir la barra  $L_2$  y su extremo  $B$ , ésta misma formará un ángulo con la barra  $L_1$  el cual se le llamará  $\theta_2$ , hay que destacar que la barra  $L_2$  es la barra motriz por donde entra el movimiento angular al mecanismo, tal como se muestra la Figura 2.13.

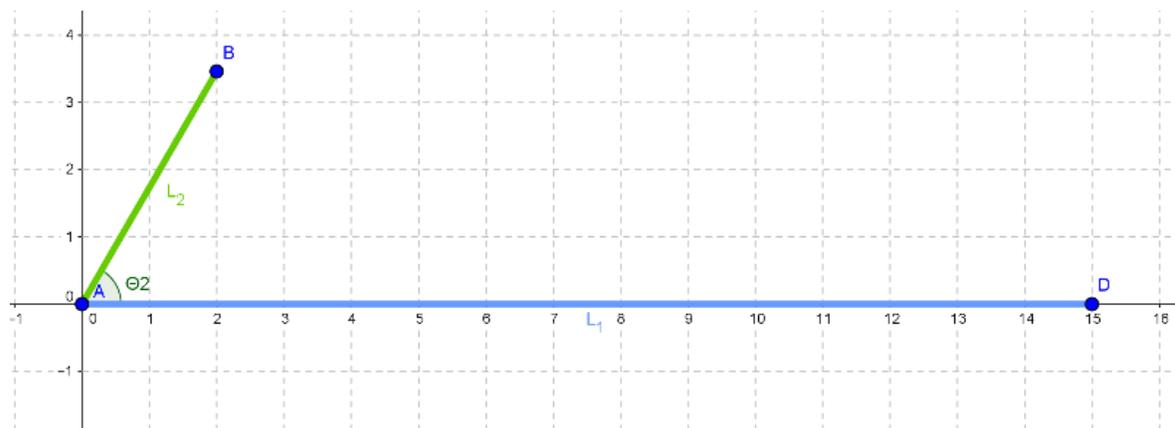


Figura 2.13: Esquema 3 del mecanismo de cuatro barras.

Para continuar se genera otro segmento de recta que se llamará  $L_3$ , la cual tendrá al punto  $C$  en su otro extremo y para orientarla se tiene que generar una recta horizontal auxiliar, a la que se nombra por referencia como recta uno. Esta pasará por el punto  $B$ , definiendo un ángulo llamado  $\theta_3$  entre la recta uno y el segmento de recta  $L_3$ , tal como se ilustra la Figura 2.14.

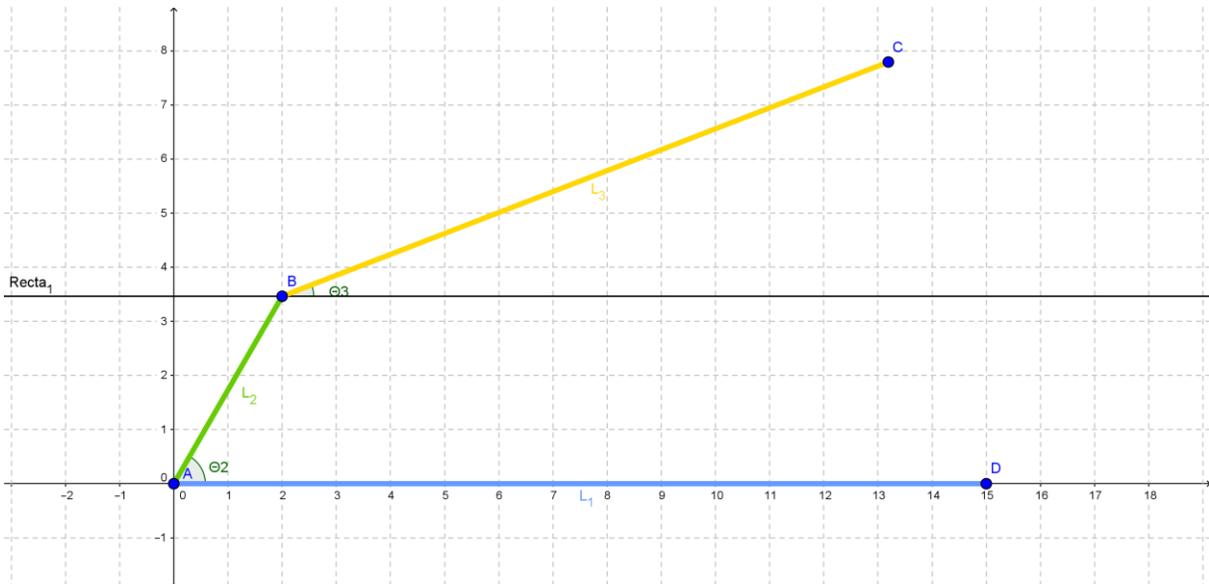


Figura 2.14: Esquema 4 del mecanismo de cuatro barras.

Dando continuación a lo dicho anteriormente, se define el segmento de recta que representa la barra  $L_4$ , la cual irá desde el punto  $C$  hasta el punto  $D$ , dicha barra formará un nuevo ángulo entre la barra y el eje X, ángulo que será llamado  $\theta_4$  cómo se ilustra en la Figura 2.15.

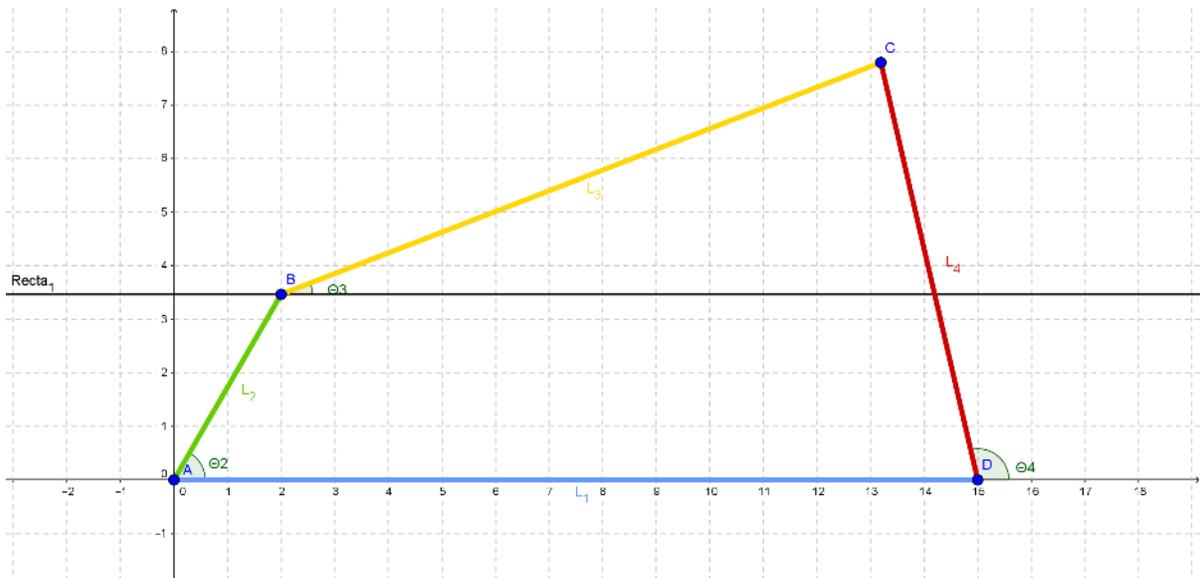


Figura 2.15: Esquema 5 del mecanismo de cuatro barras.

Finalmente, si se hace de lado a la recta de referencia, se habrá obtenido el esquema que se muestra en la Figura 2.16.

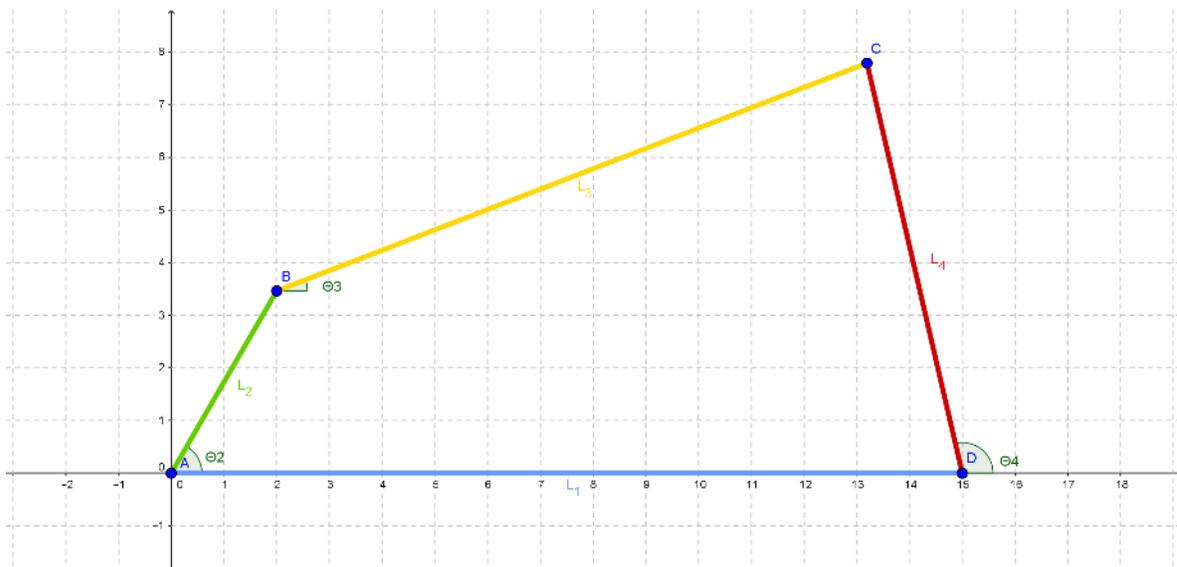


Figura 2.16: Esquema 6 del mecanismo de cuatro barras.

**2.2.4 Análisis de posición de un mecanismo de 4 barras.**

Ahora se puede comenzar con el análisis de posición, recordando que el ángulo  $\theta_1$  es igual a cero y que el ángulo  $\theta_2$  es una variable de entrada al sistema, entonces las variables que se deben de encontrar serán los ángulos  $\theta_3$  y  $\theta_4$  en función de la variable  $\theta_2$ .

Para comenzar se realiza un esquema vectorial como se muestra en la Figura 2.17.

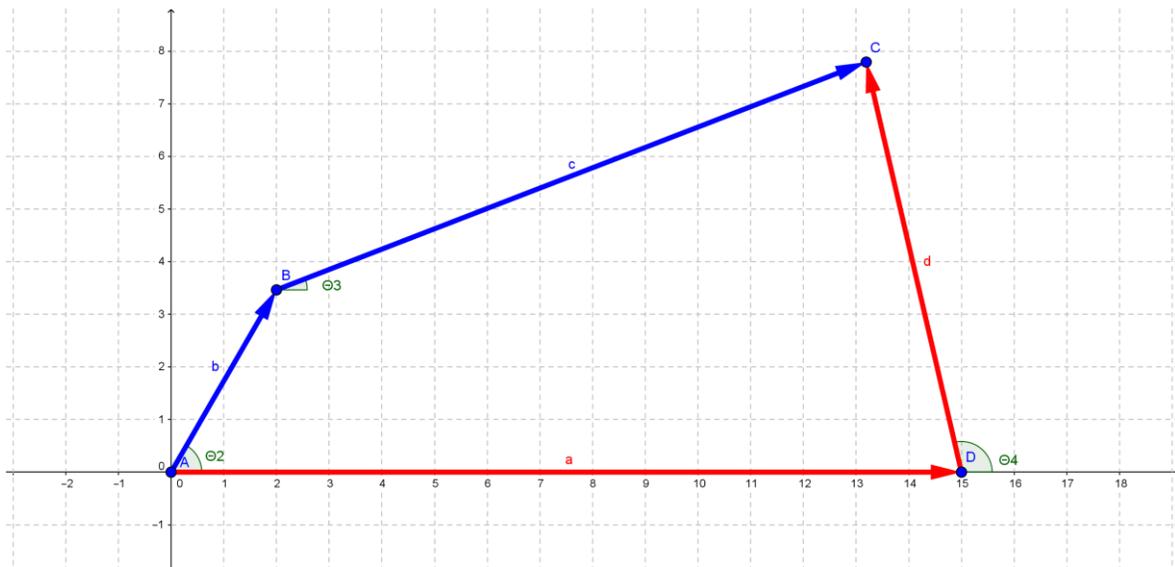


Figura 2.17: Esquema vectorial del mecanismo de cuatro barras

De donde resulta la siguiente ecuación vectorial:

$$\vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + \vec{d}$$

(2-

19)

La cual se puede analizar con números complejos, donde se infiere que:

$$\begin{aligned}
 b \cos(\theta_2) + b \sin(\theta_2) \mathbf{i} + c \cos(\theta_3) + c \sin(\theta_3) \mathbf{i} & \quad (2- \\
 = a \cos(\theta_1) + a \sin(\theta_1) \mathbf{i} + d \cos(\theta_4) + d \sin(\theta_4) \mathbf{i} & \quad 20)
 \end{aligned}$$

En vista de que se está tratando con una ecuación que involucra números complejos (números reales e imaginarios), podemos separar los números reales (los cuales son análogos a las proyecciones en el eje X en un plano cartesiano), de los números imaginarios (los cuales son análogos con proyecciones en el eje Y), generando dos relaciones independientes en las que podemos identificar la parte real como:

$$\begin{aligned}
 b * \cos(\theta_2) + c * \cos(\theta_3) = a * \cos(\theta_1) + d * \cos(\theta_4) & \quad (2- \\
 & \quad 21)
 \end{aligned}$$

De igual modo se puede encontrar la relación generada por la parte imaginaria:

$$\begin{aligned}
 b * \sin(\theta_2) + c * \sin(\theta_3) = a * \sin(\theta_1) + d * \sin(\theta_4) & \quad (2- \\
 & \quad 22)
 \end{aligned}$$

Tomando en consideración que se controla el ángulo  $\theta_2$  y que el ángulo  $\theta_1$  tiene un valor de  $0^\circ$ , entonces se tiene un sistema de dos ecuaciones y tres variables, las variables  $\theta_3$  y  $\theta_4$  en función de la variable  $\theta_2$ .

Ya que el ángulo  $\theta_3$  es el más problemático y el que da menos información de todos, lo se deja de un solo lado de la ecuación previendo eliminar ese ángulo más adelante con identidades trigonométricas.

$$c \cos(\theta_3) = a \cos(\theta_1) - b \cos(\theta_2) + d \cos(\theta_4) \quad (2-23)$$

$$c \sin(\theta_3) = a \sin(\theta_1) - b \sin(\theta_2) + d \sin(\theta_4) \quad (2-24)$$

El siguiente paso será elevar al cuadrado la ecuación (2-23) y debido a esto se obtiene:

$$\begin{aligned} c^2 \cos^2(\theta_3) &= a^2 \cos^2(\theta_1) + b^2 \cos^2(\theta_2) + d^2 \cos^2(\theta_4) \\ &\quad - 2 a b \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \quad (2- \\ &\quad + 2 a d \cos(\theta_1) \cos(\theta_4) \quad 25) \\ &\quad - 2 b d \cos(\theta_2) \cos(\theta_4) \end{aligned}$$

De manera similar **se eleva** al cuadrado la ecuación número (2-24), y por consiguiente se tiene que:

$$\begin{aligned}
 c^2 \sin^2(\theta_3) &= a^2 \sin^2(\theta_1) - b^2 \sin^2(\theta_2) + d^2 \sin^2(\theta_4) \\
 &- 2 a b \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) && (2- \\
 &+ 2 a d \sin(\theta_1) \sin(\theta_4) && 26) \\
 &- 2 b d \sin(\theta_2) \sin(\theta_4)
 \end{aligned}$$

Ahora que se cuenta con las ecuaciones (2-25) y (2-12), podemos considerar la identidad trigonométrica deducida a partir del teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
 \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) &= 1 && (2- \\
 &&& 27)
 \end{aligned}$$

Aprovechando esta identidad trigonométrica podemos sumar las ecuaciones (2-25) y (2-12). para excluir al ángulo gamma de la ecuación, obteniendo como resultado:

$$\begin{aligned}
 c^2 &= a^2 + b^2 + d^2 - 2 a b (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)) \\
 &+ 2 a d (\cos(\theta_1) \cos(\theta_4) + \sin(\theta_1) \sin(\theta_4)) && (2- \\
 &- 2 b d (\cos(\theta_2) \cos(\theta_4) + \sin(\theta_2) \sin(\theta_4)) && 28)
 \end{aligned}$$

#### ***2.2.4.1 Despeje del ángulo $\theta_4$ en función del ángulo $\theta_2$***

Para simplificar cálculos posteriores, se deja los términos cuadrados del lado derecho de la ecuación y los términos que contienen al doble producto de la variable  $b$  multiplicada por la variable  $d$  del lado izquierdo de la ecuación, además de simplificar un poco los términos, obteniendo de esta forma:



De esta manera se puede simplificar la ecuación número (2-30), reduciéndose a lo que se muestra en la ecuación (2-32).

$$\begin{aligned} & \cos(\theta_2) \cos(\theta_4) + \sin(\theta_2) \sin(\theta_4) && (2- \\ & = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + d^2}{2 b d} - \frac{a}{d} \cos(\theta_2) + \frac{a}{b} \cos(\theta_4) && 32) \end{aligned}$$

Para simplificar un poco más el despeje compactaremos los términos constantes, en nuevas constantes globalizadas:

$$C = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + d^2}{2 b d} \quad (2-33)$$

$$B = -\frac{a}{d} \quad (2-34)$$

$$A = \frac{a}{b} \quad (2-35)$$

Gracias a esto la ecuación número (2-32) se convierte en:

$$\cos(\theta_1) \cos(\theta_4) + \sin(\theta_1) \sin(\theta_4) = C + B \cos(\theta_1) + A \cos(\theta_4) \quad (2-36)$$

Para poder continuar con el despeje de Delta, se debe tomar en consideración un futuro cambio de variable haciendo uso de las siguientes identidades trigonométricas:

$$\cos(\delta) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)} \quad (2-37)$$

$$\sin(\delta) = \frac{2 \tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)} \quad (2-38)$$

El siguiente paso será sustituir dichas identidades de la ecuación número (2-36)

$$\begin{aligned} \cos(\theta_2) \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)} + \sin(\theta_2) \frac{2 \tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)} & \quad (2- \\ & \quad 39) \\ = C + B \cos(\theta_2) + A \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)} & \end{aligned}$$

Ahora se multiplica toda la ecuación (2-39) por el término  $\left[1 + \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)\right]$ , obteniendo como resultado:

$$\begin{aligned} \cos(\theta_2) \left(1 - \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)\right) + \sin(\theta_2) \left(2 \tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right)\right) & \quad (2- \\ = C \left(1 + \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)\right) + B \cos(\theta_2) \left(1 + \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)\right) & \quad 40) \\ + A \left(1 - \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)\right) & \end{aligned}$$

Nuevamente se simplifica el despeje de la ecuación haciendo uso ahora de un cambio de variable para el término Delta, el cual se despeja por medio de una variable  $X$  como se muestra continuación:

$$X = \tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right) \quad (2-41)$$



De modo que la ecuación (2-40) se convertirá ahora en:

$$\begin{aligned} \cos(\theta_2) (1 - X^2) + \sin(\theta_2) (2 X) & \quad (2- \\ & = C (1 + X^2) + B \cos(\theta_2) (1 + X^2) + A (1 - X^2) \quad 42) \end{aligned}$$

Se puede hacer que la ecuación (2-42) luzca más simplificada realizando los siguientes cambios de variables:

$$U = \cos(\theta_2) \quad (2-43)$$

$$V = \sin(\theta_2) \quad (2-44)$$

Prosiguiendo la ecuación (2-42) se convertirá en:

$$U(1 - X^2) + V(2 X) = C (1 + X^2) + B U(1 + X^2) + A (1 - X^2) \quad (2-45)$$

Se examina brevemente ahora la ecuación (2-45), dicha ecuación obtiene sus soluciones a partir de las condiciones cuadráticas de la misma, y como en cualquier ecuación cuadrática nuestras soluciones pueden ser de tres tipos. En caso de que el discriminante dentro del radical sea negativo significará que la solución es compleja conjugada, lo cual quiere decir que las

longitudes elegidas para los eslabones no permiten establecer una conexión para el valor elegido del ángulo Beta.

En lo que se refiere a un discriminante dentro del radical de tipo positivo, representará que existen dos soluciones para el ángulo Delta en función del ángulo Beta, siendo la solución con radical negativo la de una configuración abierta, y la positiva resulta en una configuración cruzada. En cambio, si el discriminante dentro del radical es igual a cero el hecho será que sólo podrá existir una configuración abierta para el mecanismo. Una vez dicho esto se puede resolver la ecuación para la variable  $X$  de la ecuación (2-45) la cual se pueden apreciar a continuación:

$$X_{1,2} = \frac{-V \pm \sqrt{V^2 + A^2 - 2 A U - (C + (B - 1)U)(C + U (B + 1))}}{A - (B + 1)U - C} \quad (2-46)$$

En este momento lo que se tiene que hacer es realizar las sustituciones inversas en la ecuación (2-46) de todos los cambios de variables que hemos hecho, para encontrar los resultados en términos de las barras y de los ángulos descritos en la ecuación (2-28):

$$\tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right) = \frac{-V \pm \sqrt{V^2 + A^2 - 2 A U - (C + (B - 1)U)(C + U (B + 1))}}{A - (B + 1)U - C} \quad (2-47)$$

Este punto se debe realizar simplificaciones para la ecuación número (2-47) buscando el factor  $2 b d$  fuera del radical, y el factor  $4 b^2 d^2$  dentro del radical como se realiza a continuación:

$$\theta_4 = 2 \arctan \left( \frac{-V + \sqrt{V^2 + A^2 - 2AU - (C + (B-1)U)(C + U(B+1))}}{A - (B+1)U - C} \right) \quad (2-48)$$

## CAPÍTULO III

### CONCEPTUALIZACIÓN DEL MECANISMO

#### 3.1 ¿Como lograr un movimiento omnidireccional?

En esta parte del proyecto se puede considerar la más abstracta, ya que fue en la que se imaginó no el mecanismo en sí mismo, sino el movimiento deseado a la salida del mecanismo, para lo que se le dio prioridad a responder a la pregunta, ¿cómo lograr un movimiento omnidireccional?

Un neumático convencional cuenta con dos grados de libertad. Estos son dos grados de libertad de tipo rotativo. El primero es concéntrico con el radio de la llanta siendo el que refleja la potencia del motor, proporcionando un módulo a un vector de movimiento (ya sea positivo, o negativo cuando el carro va de reversa), en un plano paralelo a la superficie en la que se encuentra el vehículo. El segundo está relacionado con la maniobrabilidad del neumático, proporcionando dirección al vector de movimiento anteriormente mencionado.

Este último grado de libertad tiene un rango de rotación delimitado en los vehículos y normalmente es localizado solamente en el par de llantas delanteras. por lo que las trayectorias posibles a realizar por dichos automóviles se encuentran delimitadas. Esto último se hace particularmente notorio en ambientes reducidos o con obstáculos en donde el manejo para evitar colisiones suele complicarse. Por lo tanto, darle una amplitud a este último grado de libertad de al menos 180 grados permitiría conseguir un movimiento omnidireccional.

### 3.2 Diseño de prototipo inicial:

Para generar el movimiento omnidireccional en esta tesis, se tratará de modificar el mecanismo de transmisión de potencia que se utiliza convencionalmente en los ejes del carro, el cual comúnmente es un par de barras simples.

Para realizar esto se tratará de diseñar un mecanismo modificado de tres ejes, en vez del eje sólido que se usa normalmente. Basándose en el funcionamiento de un mecanismo de cuatro barras, para permitir la articulación y giro de la llanta desde un solo punto de sujeción y rotación, en vez del sistema de un punto de apoyo y dos de rotación que se utiliza normalmente.

Para comenzar este diseño se partirá del neumático del vehículo, el cual se pretende sea de índole comercial. Como variar la dimensión de la llanta resultaría en la variación de las medidas del mecanismo a realizar, se partirá de un neumático fijo y se realizara el diseño para dicho neumático. Como se sabe por conocimiento general las dimensiones del neumático vienen dadas en una leyenda que está visible sobre el neumático, por dar un ejemplo se tiene la siguiente leyenda. “195/65 R15”. Esta es una leyenda de un neumático comercial real y sobre la que trabajaremos en este documento. Estos dígitos nos sirven para conocer las dimensiones de la llanta, para lo que nuestro caso sería pertinente encontrar el valor del diámetro exterior y el ancho de la llanta para poderlos plasmar en una vista superior.

La primera dimensión, la cual es el ancho de la llanta es relativamente fácil de leer ya que los primeros tres dígitos representan el ancho de la llanta medido en milímetros, por lo tanto, para nuestro caso tenemos que:

$$w = 195mm \quad (3-1)$$

La siguiente dimensión que interesa encontrar es el diámetro exterior de la rueda, esta dimensión no es tan directa de leer, pero la información en la leyenda es suficiente para calcularlo.

Los siguientes dos números, que para el ejemplo particular son 65 nos indica una relación porcentual entre el ancho de la llanta y el alto de la llanta, la cual se mide desde el diámetro exterior del rin como se muestra en la Figura 3.1 hasta el diámetro exterior de la llanta. Dicho de otra manera, el alto de la llanta es punto 65 veces el ancho de la llanta.

$$h = .65 * 195mm = 126.7mm \quad (3-2)$$

Entonces si se quiere encontrar el diámetro exterior hay que multiplicar la altura de la llanta por dos y sumarle el diámetro exterior del rin.



Figura 3.1: altura que se mide según la leyenda de los neumáticos comerciales.



Para conocer el diámetro exterior del rin sólo se tiene que fijar en el número que acompaña a la R dentro de la leyenda del neumático, para este caso es un 15, lo que significará que el diámetro exterior del rin tendrá una medida de 15 pulgadas, para poder encontrar el diámetro exterior de la llanta lo siguiente en lista, sería convertir esas 15 pulgadas a milímetros:

$$15in = 381mm \quad (3-3)$$

Ahora se cuenta con todos los datos necesarios para poder calcular el diámetro exterior del neumático:

$$2(195) * .65 + 15in = 634.5mm \quad (3-4)$$

Finalmente se puede representar el neumático desde una vista superior por medio de un rectángulo como se muestra en la Figura 3.2, utilizando los datos de la leyenda del neumático para obtener un esquema parametrizado de los neumáticos comerciales.

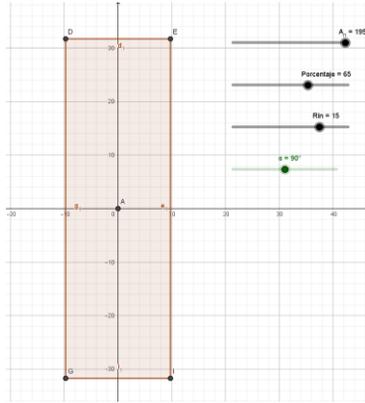


Figura 3.2: representación de la vista superior de un neumático en geogebra

La idea general de este mecanismo es hacer que la llanta obtenga una rotación desde  $0^\circ$  hasta  $180^\circ$ , para ayudar a visualizar esto se construye el segmento F, el cual indicarán la dirección en la que se moverá la llanta como se ve en la Figura 3.3.

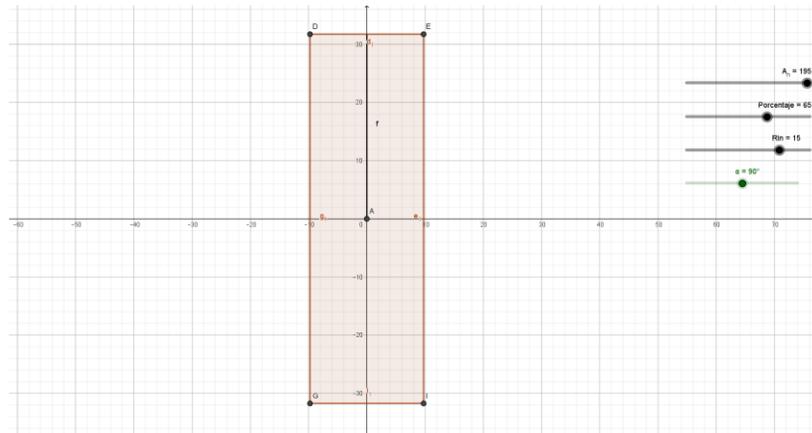


Figura 3.3: visualización del neumático rotado  $90^\circ$ .

De modo que, si giramos la llanta el segmento F mencionado rotaría junto con ella como se ve en la Figura 3.4.

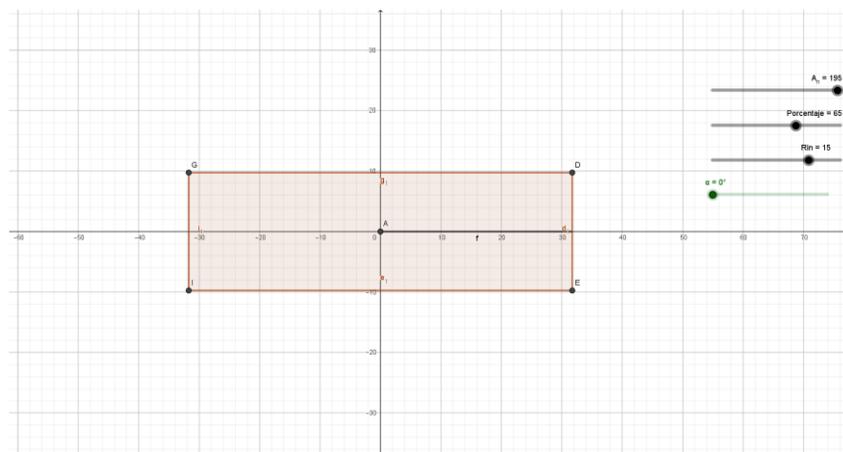


Figura 3.4: visualización del neumático con una rotación de  $0^\circ$ .

A pesar de que la vista superior aparentemente es la misma, una configuración que se mueve a la izquierda o a la derecha se diferencia por el segmento de F como se muestra en la Figura 3.5.

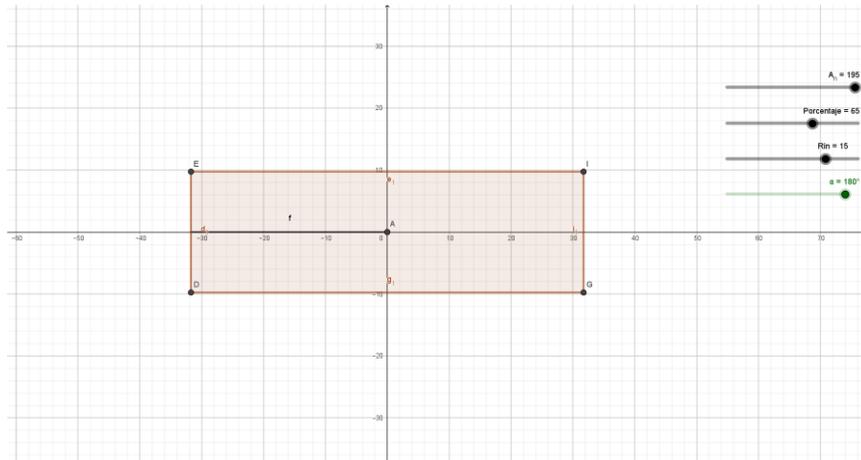


Figura 3.5: visualización del neumático rotado 180°

Para hacer que la llanta ruede sin hacer uso de tecnología *inwheel*, imaginar que la potencia de la rueda se obtiene de una flecha ortogonal a la llanta y que debe tener el mismo rango de movimiento que el deseado para la llanta, lo cual se representa como el segmento m en la Figura 3.6.

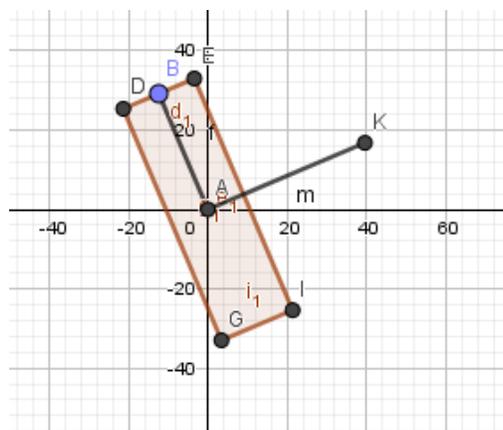


Figura 3.6: esquema que muestra una flecha ortogonal al neumático



Si se resuelve este sistema ecuaciones se encuentran nuevas condiciones para las fórmulas del mecanismo de cuatro barras.

$$L_3 = L_1 \quad (3-7)$$

$$L_2 = \sqrt{L_1^2 + L_4^2} - L_1 \quad (3-8)$$

$$L_4 \neq 0 \quad (3-9)$$

$$\sqrt{L_1^2 + L_4^2} \neq L_1 \quad (3-10)$$

Ahora que se tiene la barra tres y la barra dos en función de la barra uno y la barra imaginaria cuatro, se puede deducir las distancias necesarias a partir de los valores parametrizados de la flecha uno y la flecha cuatro.

De esta forma se representa la flecha tres por el segmento  $s$  y la flecha dos por el segmento  $n$ , como se muestra en la Figura 3.8.

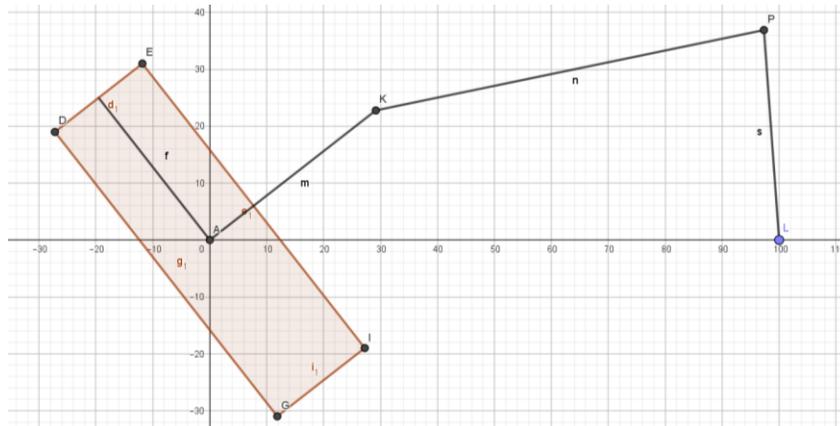


Figura 3.8: esquema del mecanismo en función de las distancias  $L_1$  y  $L_4$

Con esto se puede visualizar las posiciones más críticas del mecanismo, las cuales son cuando la llanta se encuentra a  $90^\circ$  a  $180^\circ$  y a  $0^\circ$ , las cuales se pueden visualizar en las Figuras 3.9, 3.10, y 3.11.

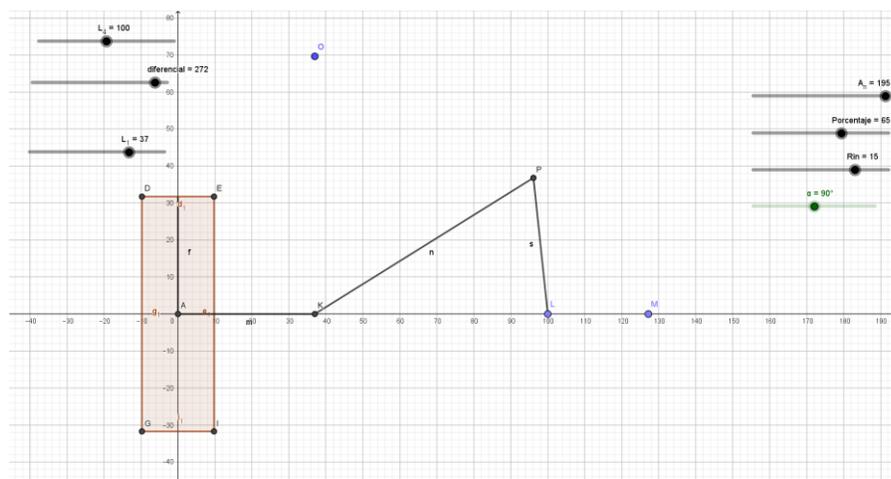


Figura 3.9: mecanismo con neumático a  $90^\circ$  y dependencia entre las longitudes de sus barras

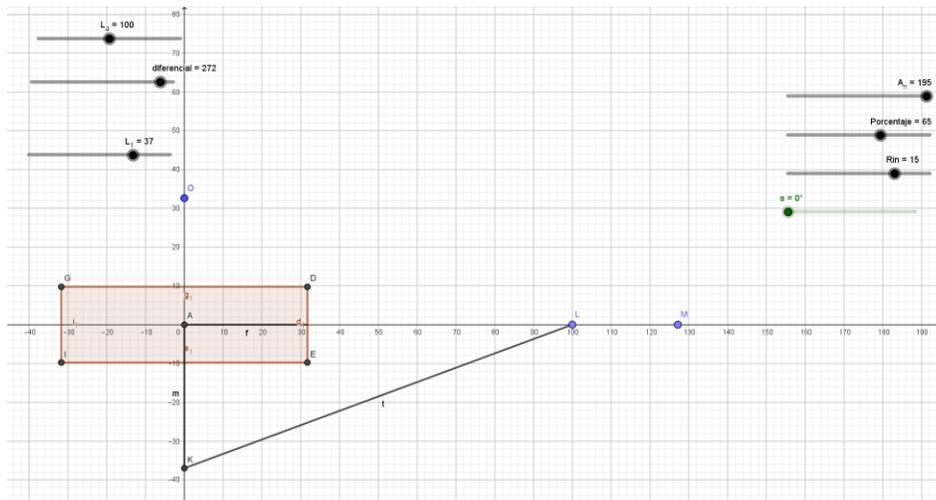


Figura 3.10: mecanismo con neumático a  $0^\circ$  y dependencia entre las longitudes de sus barras

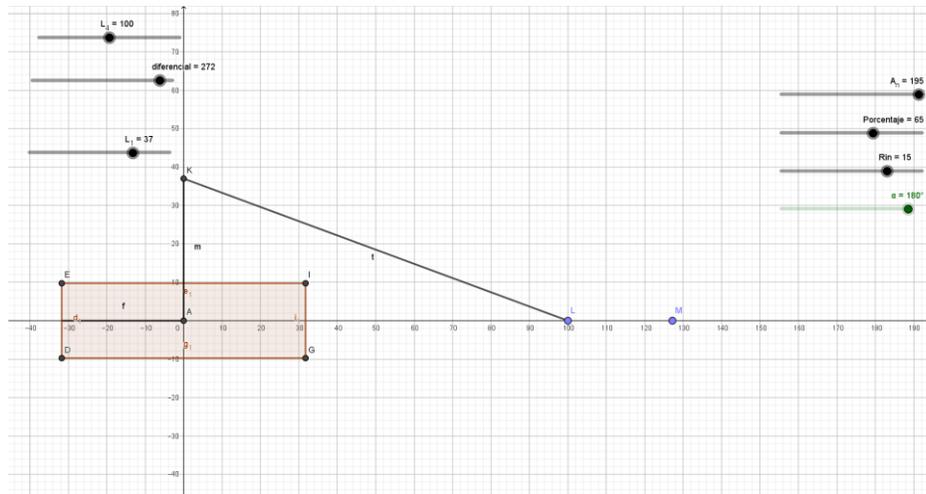


Figura 3.11: mecanismo con neumático a  $180^\circ$  y dependencia entre las longitudes de sus barras



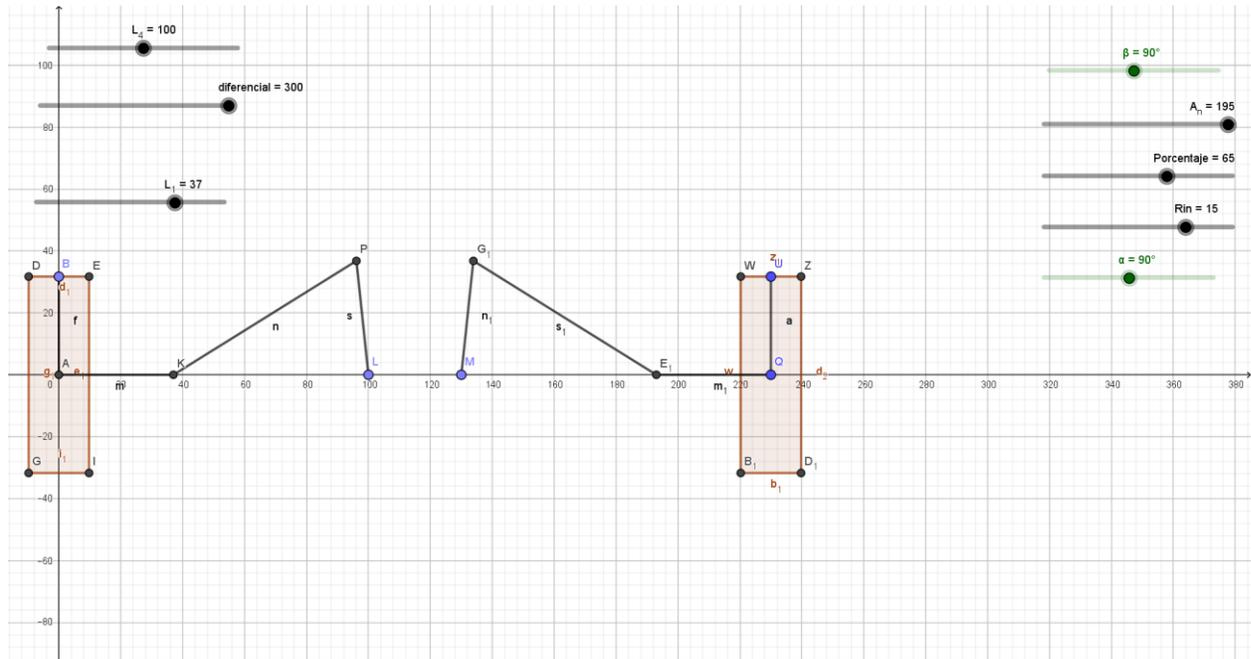


Figura 3.13: esquema que muestra dos mecanismos encontrados sobre un mismo eje

Analizando las medidas de diferentes vehículos deportivos comerciales, se encuentra que el ancho del vehículo siempre ronda por debajo de los 2 m, siendo el tesla Model X el más ancho de los vehículos encontrados, con un ancho de 207 centímetros, además dentro de lo que se conoce como diseño de calles y avenidas se considera pertinente el diseño de carriles de 10 y 8 pies, para el uso de vehículos civiles. siendo un carril de ocho pies el caso más limitado para transitar.

Lo que genera una nueva restricción para el dimensionamiento del mecanismo de transmisión de potencia, ya que será la dimensión de este mecanismo lo que definirá el ancho del vehículo final, o visto desde otra perspectiva el ancho del vehículo delimitará las dimensiones del mecanismo.

Teniendo como meta diseñar el mecanismo para un ancho de vehículo menor o igual a 2 m. Se incluye una distancia parametrizada que representara el ancho del diferencial que uniría ambos mecanismos en un solo eje como se muestra en la Figura 3.14.

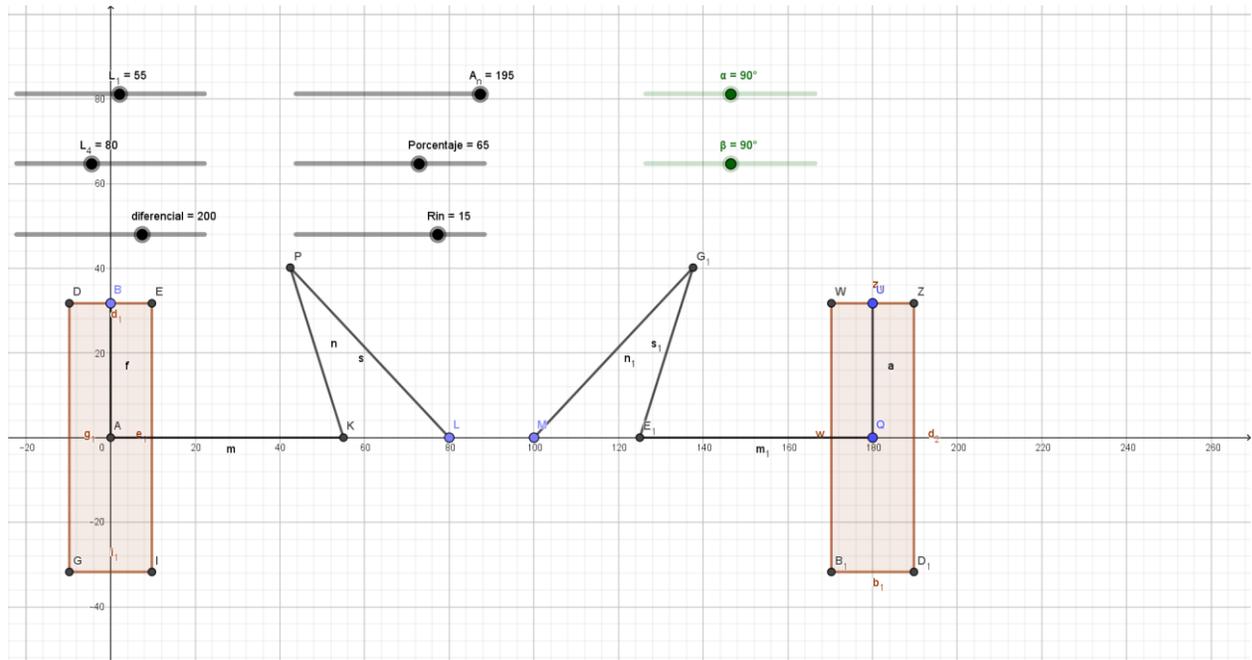


Figura 3.14: esquema del mecanismo de un eje incluyendo el diferencial. (centrar)

Variando los diferentes parámetros y haciendo inspecciones visuales sobre la simulación del mecanismo se concluye que para el neumático dado la longitud de la barra uno, fuese de 55 cm, la de la barra cuatro fuese de 75 cm y el espacio para trabajar el diferencial de 30 cm. Esto genera un ancho de vehículo de 199.5 centímetros y un movimiento que evita la interferencia entre el neumático y las barras del mecanismo.

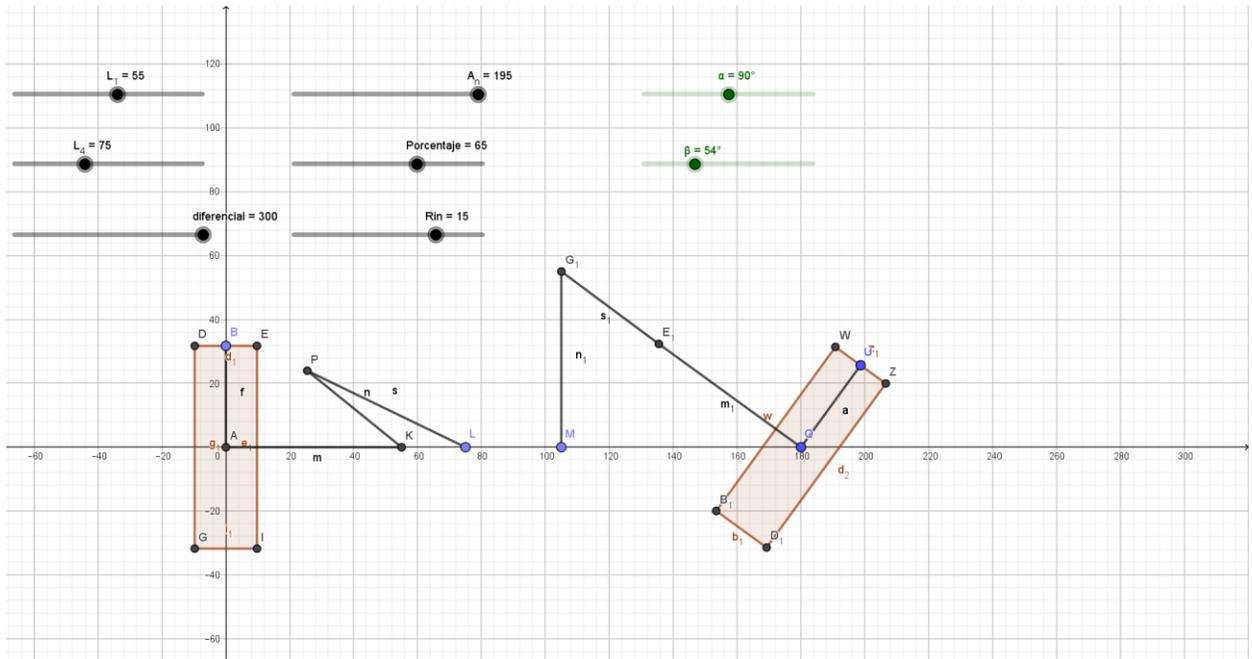


Figura 3.15: esquema del mecanismo con las dimensiones seleccionadas

Una vez definidas los largos de las barras se presenta un nuevo problema, el cual es, diseñar los elementos que sirvan como juntas para las flechas móviles, y como se puede apreciar en la Figura 3.15 esto requerirán trabajar con ángulos muy extremos por lo que sistemas convencionales no serán viables.

## CAPÍTULO IV

### JUNTA HOMOCINÉTICA

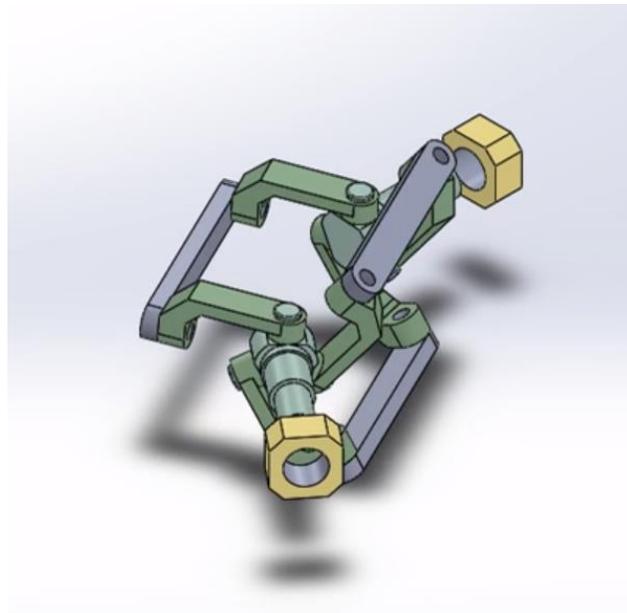
Debido a la naturaleza extrema de las condiciones que deben cumplir las juntas para el mecanismo deseado, esta parte del diseño conlleva invertir mayor tiempo en su diseño, ya que además de poder soportar ángulos extremos se requiere que las flechas logren tener libertad de giro independientemente de la posición del mecanismo, y por si fuera poco el límite de espacio exige un diseño lo más compacto posible.

Una de las necesidades para la articulación de este mecanismo es que sea una junta de tipo homocinética, por esto mismo queda descartada la junta tipo *Cardán* a pesar de ser la junta universal más conocida, esto debido a que el eje que recibe el movimiento no gira a la misma velocidad que el eje que da el movimiento; de hecho, si el eje que da movimiento tiene una velocidad constante, pero se encuentra en un ángulo diferente a  $180^\circ$ , entonces tendríamos como resultado una velocidad oscilante en el eje que recibe el movimiento.

Sin embargo, existen múltiples tipos de juntas universales de tipo homocinéticas, tales como la junta tipo *Hobson*, la junta tipo *Tracta*, la junta tipo *Rzeppa* o la junta tipo *Glaencer-Spicer* (la cual también es conocida como *Cardán doble*), y a pesar de la gran variedad de juntas universales de tipos homocinéticas que existen, las tipo *Hobson* son las que admiten un ángulo entre flechas considerablemente amplio, sin embargo, es muy probable que las flechas del mecanismo excedan incluso los ángulos aceptados por la junta tipo *Hobson*. Por lo cual decidí explorar diferentes alternativas.

#### 4.1 juntas homocinéticas exploradas

La primera de estas opciones mencionadas que se estudia es un mecanismo conocido como cuatro barras esférico de cuatro revoluciones. [41], [42], el cual se simula en *SolidWorks*, y el cual sirve como contacto con el dr. Thang [43], este mecanismo se muestra en la Figura 4.1 lamentablemente por la complejidad y volumen del mecanismo se optó por explorar diferentes opciones.



*Figura 4.1: visualización del mecanismo S4R*

La siguiente opción que se exploró fue la junta conocida como *flip gears*, la cual fue desarrollada y comercializada por el M. Oskar Van Deventer [44], y se puede apreciar en la Figura 4.2.

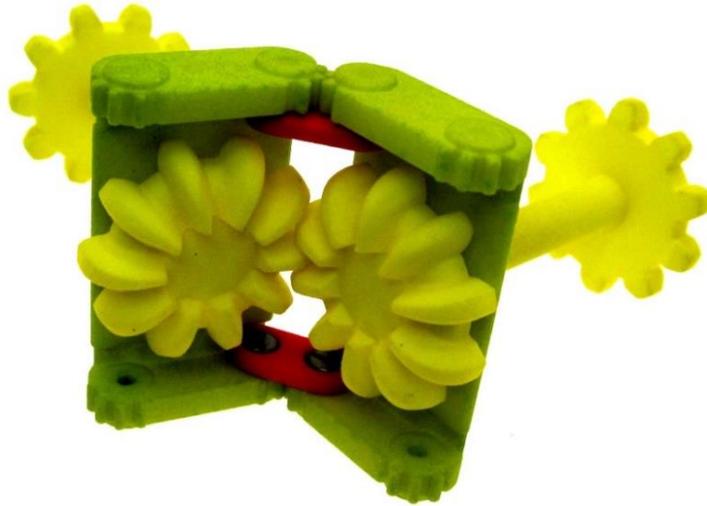
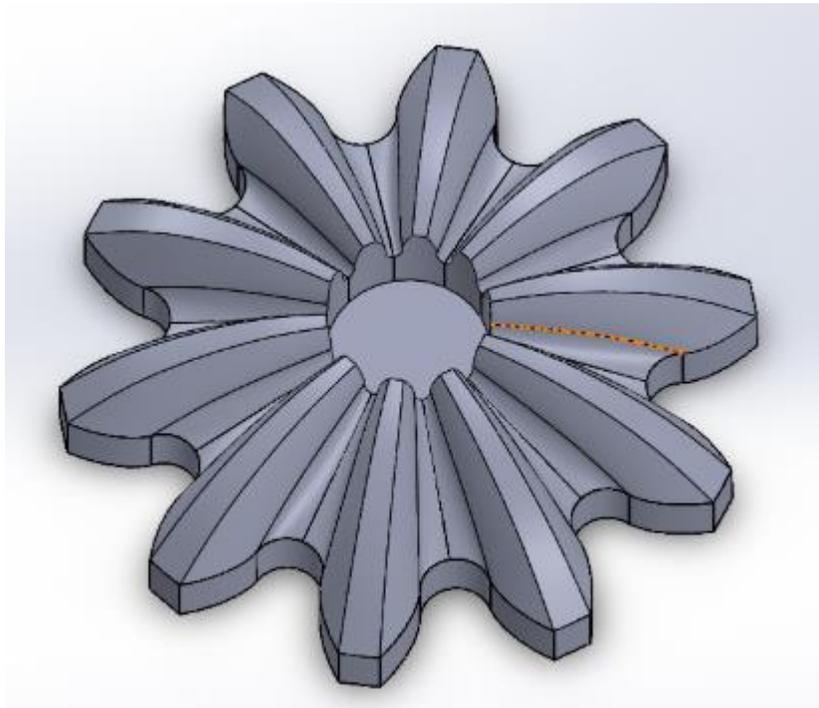


Figura 4.2: *flip gear* [45]

Aunque se compró un ejemplar de estos para tratar de descifrar por medio de ingeniería inversa la geometría de los mismos, nunca se llegó a una geometría exactamente igual al mencionado *flip gear* sin embargo, se obtuvo un modelo muy similar el cual se puede apreciar en la Figura 4.3.

El verdadero problema de este mecanismo se dio a conocer al intentar generar un mecanismo que sostuviera los engranes y que les permitieran el rango de movimiento deseado, al no poder imaginar dicho mecanismo se decidió investigar más opciones.



*Figura 4.3: modelo encontrado al tratar de imitar el flip gear*

Pensando en el problema de sujeción de este modelo, se decidió optar por un engrane de tipo esférico.

Como decisión final se escogió como elemento homocinético el mecanismo de transmisión por medio de engranes esféricos [46] patentado en el 2014 por Hanlin Hong en Estados Unidos, el cual se puede observar en la Figura 4.4. Pero se realizará una mejora geométrica gracias a las ecuaciones de diseño de engranes optimizadas que se abordará más adelante.

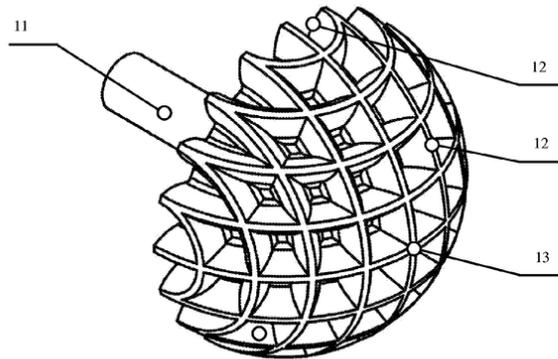


Figure 2 (a)

Male Spherical Gear 20

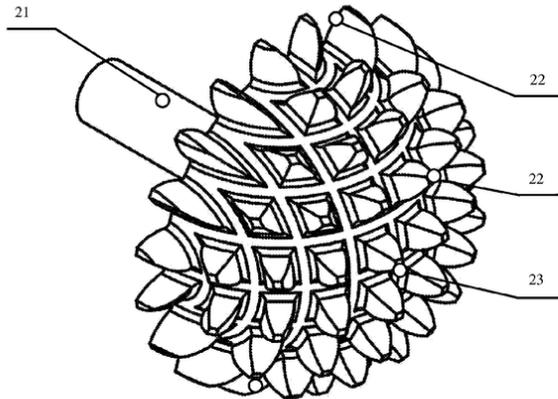


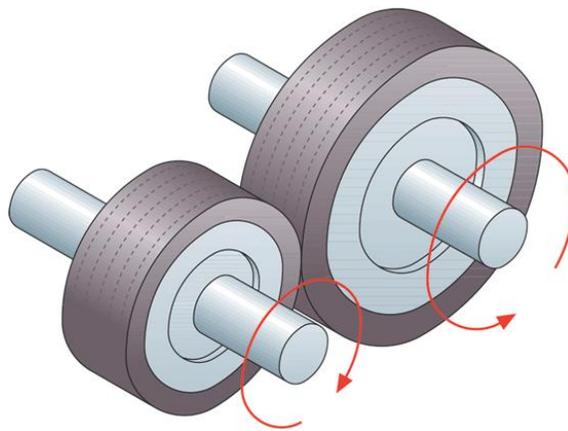
Figure 2b

Figura 4.4: esquema de engranes esféricos de Hanling Hong [46]

#### 4.2 Diseño de un engrane a partir de conceptos geométricos.

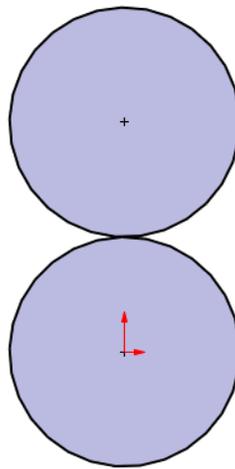
“La forma mas sencilla de entender como funciona un engrane es por medio de un conjunto de cilindros rotativos en contacto”[6].

El mecanismo de cilindros rotativos consisten en dos ruedas que se encuentran en contacto directo. La rueda de entrada (conectada a una fuente de potencia) transmite por fricción la rotacion obtenida a la siguiente rueda como se muestra en la Figura 4.5. Siempre que haya suficiente fricción en la superficie rodante, el mecanismo de cilindros rotativos funcionará. Pero aun así, al trabajar por fricción el desgaste de material en este mecanismo es tan grande que simplemente no es práctico en sistemas de alta potencia. Un ejemplo donde se puede apreciar esto es en las llantas de un automovil, ya que cuando “se quema llanta” se esta tratando de transferir mas potencia de la que soporta el material de las llantas a el pavimento.



*Figura 4.5: Mecanismo de cilindros rotativos*

La función principal de un engrane es transferir el movimiento rotativo de un eje a otro. Pero cuando se hace un diagrama de cuerpo libre un engrane se puede tratar como dos círculos que están en contacto de una forma tangente como se muestra en la Figura 4.6. En otras palabras un engrane se puede considerar como una variación del mecanismo de cilindros rodantes. En donde la circunferencia conceptual de dicho cilindro se define por lo que se conoce como diámetro de paso.

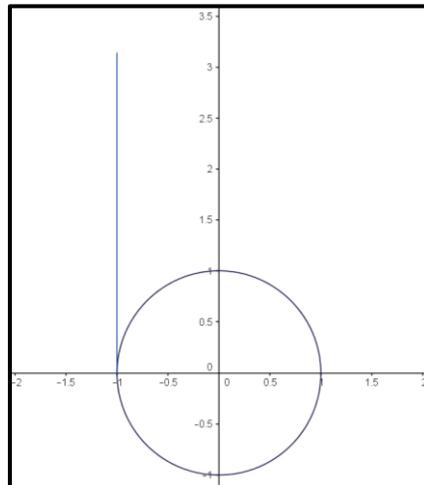


*Figura 4.6: esquema de diámetros de paso en contacto.*

Una de las características idealizadas de un engrane es su forma de contacto, pues un engrane ideal tiene un contacto constante con otro, y a diferencia de los cilindros rotativos deben funcionar por medio de presión en lugar de fricción.

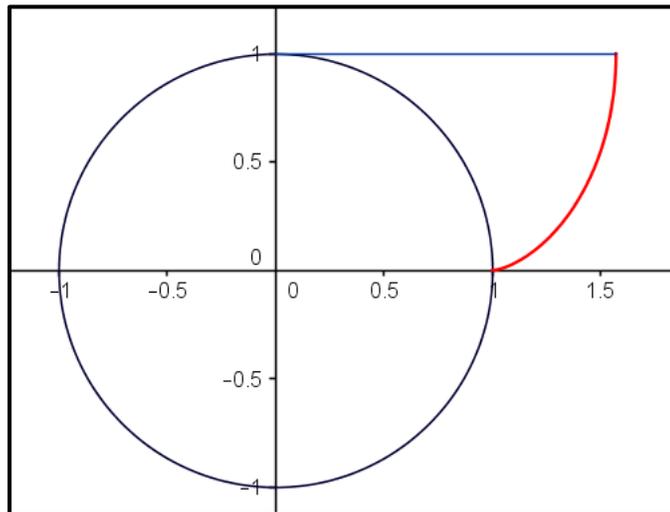
“Si se agregan radios a un círculo por medio de barras, podemos transmitir movimiento. Para reducir la acción desigual entre las barras hay que aumentar el número de radios y barras. Para seguir reduciendo aun mas los espacios entre las barras se puede cambiar la forma de las barras por una mas eficiente. Consiguiendo así un contacto firme y continuo.” [47]

La diferencia principal entre un cilindro rotativo y un engrane son sus dientes. Pero ya que la geometría de los dientes de los engranes actuales fue escogida como una curva envolvente en 1745 por el matemático y físico Leonard Euler, se explica también un poco de las propiedades de esta curva para entender el porqué esta curva fue escogida. La cual es relativamente fácil al imaginarse el centro de un yo-yo, enrollado por una cuerda con deformación elástica despreciable, y se deja caer libremente. Entonces se observa que la cuerda se desenrolla suavemente mientras el yo-yo gira en dirección al suelo. Pero la observación más importante en este rango de tiempo es que comienza a desenrollarse la cuerda, hasta el momento en que la cuerda se estira completamente, la cuerda siempre es tangente a la curva que describe el círculo formado por el centro del yo-yo. Todo esto mientras la longitud de la cuerda crece de forma proporcional al ángulo de rotación y es igual a la longitud de arco cubierto por ese mismo ángulo como se muestra en el esquema de la Figura 4.7.



*Figura 4.7:* esquema de cuerda que se desenrolla

Ya que el movimiento siempre es un concepto relativo porque debe aludirse a un sistema de referencia particular escogido por el observador. Puesto que diferentes observadores pueden utilizar sistemas de referencias distintos, es importante relacionar las observaciones realizadas por los diferentes puntos de vista de un evento. Para este caso específico; si se observa desde el centro del yo-yo mismo, o dicho de otra forma si situamos el sistema de referencia en el centro geométrico del yo-yo, se vería la cuerda que se desenrolla alrededor del yo-yo mientras este se encuentra fijo, desenvolviéndose siempre de manera tangencial, y que la longitud de la cuerda aumentaría en función del ángulo desenrollado. Más específicamente la longitud de la cuerda desenrollada para un ángulo dado, sería igual a la longitud de arco del círculo descrito por el núcleo del yo-yo en el mismo ángulo como se puede apreciar en la Figura 4.8.



*Figura 4.8: involuta vista desde el centro del yo-yo*

El hecho de que la cuerda se desenvuelva de manera tangencial a un círculo significa que la cuerda misma es perpendicular al centro de dicho círculo en todo momento. Además también significa que existe un segmento que define la distancia a dicho centro como se puede apreciar en la Figura 4.9.

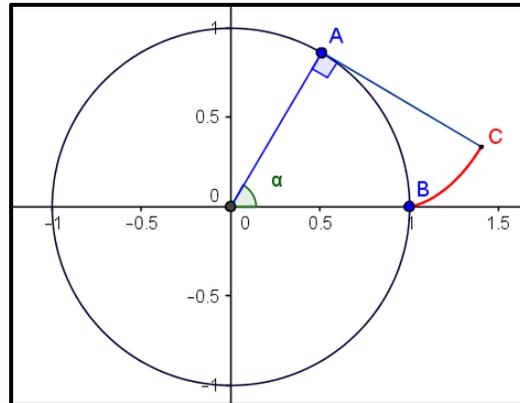


Figura 4.9: ángulo que define la involuta

Con el fin de hacer un análisis más concreto se puede definir puntos de interés, por ejemplo  $O_1$  para el origen del sistema de referencia.  $A_1$  Para el punto de tangencia entre la cuerda y el círculo,  $B$  para el punto en donde comienza a desenrollarse la cuerda. Finalmente  $C_1$  para el extremo de la cuerda que sería fijo si se viese el yo-yo fuera de su centro. Otro segmento de interés sería el segmento que une al punto  $O_1$  y al punto  $C_1$ , dicho segmento divide el ángulo  $\alpha_1$  en dos ángulos mas pequeños. Estos ángulos se citan como  $\beta_1$  y  $\gamma_1$  respectivamente como se muestra en la Figura 4.10.

Además si se trata este segmento como un vector con origen en  $O_1$ , se encuentra un vector que describe la trayectoria del punto  $C_1$ . Dicha trayectoria es la involuta descrita por Euler.

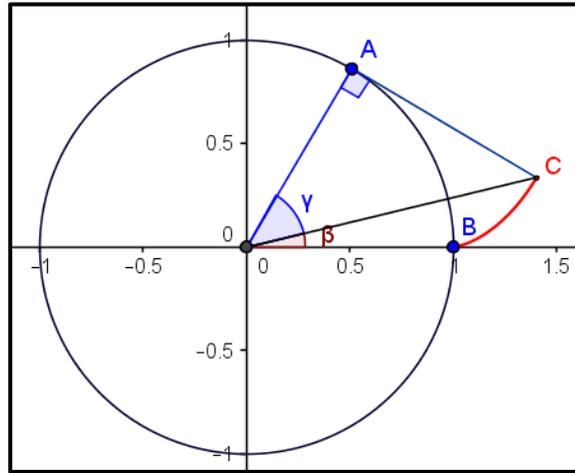


Figura 4.10: ángulos beta y gamma.

Por otra parte se puede notar que se forma un triángulo rectángulo con los segmentos  $\overline{OA}$ ,  $\overline{AC}$  y  $\overline{OC}$ , para facilitar un futuro análisis se renombrará dichos segmentos como; “ $R_a$ ”, “ $R_o$ ” y  $R_h$ , siendo estos acrónimos de “radio adyacente”, “radio opuesto”, y “radio hipotenusa” respectivamente.

$$\overline{OA} = R_a \tag{4-1}$$

$$\overline{AC} = R_o \tag{4-2}$$

$$\overline{OC} = R_h \tag{4-3}$$

Todo esto se hace con la intención de tomar  $\gamma$  como ángulo de referencia para el triángulo rectángulo, y recordando que el segmento  $\overline{OA}$  es el radio de un círculo, todas estas ideas se plantean en la Figura 4.11.

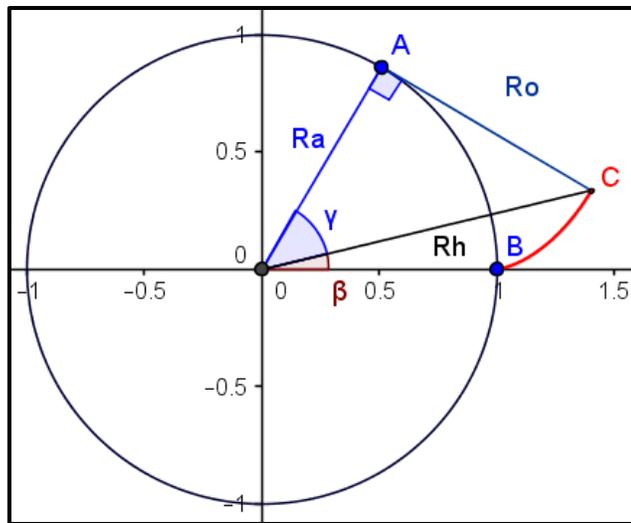


Figura 4.11: denominación de segmentos de recta según su equivalente en un triángulo rectángulo.

Como ya se mencionó anteriormente la longitud de arco del círculo es igual a la longitud de la cuerda desenrollada.

$$\widetilde{AB} = \overline{AC} \tag{4-4}$$

Recordando que se está trabajando con un triángulo rectángulo cuyo ángulo conocido es  $\gamma$  podemos deducir:

$$\cos \theta = \frac{ca}{hip} \quad (4-5)$$

$$\cos \gamma_1 = \frac{R_a}{R_h} \quad (4-6)$$

$$R_a = R_h \cos \gamma_1 \quad (4-7)$$

Otra cosa que se ha mencionado anteriormente es la relación que comparten los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ :

$$\alpha_1 = \beta_1 + \gamma_1 \quad (4-8)$$

$$\gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1 \quad (4-9)$$

Si se ~~resuelve~~ la fórmula para la longitud de arco en coordenadas polares para el caso específico partiremos de la siguiente ecuación:

$$\widetilde{AB} = \int_0^{\alpha_1} \sqrt{(r(\alpha_1))^2 + \left(\frac{d}{d\alpha}(r(\alpha_1))\right)^2} d\alpha_1 \quad (4-10)$$

Una vez que se resuelve la ecuación (4-47) llegamos a la conclusión de:

$$\alpha_1 R_\alpha = R_o \quad (4-11)$$

Y despejando  $\alpha$  de la ecuación (4-12) se encuentra que:

$$\alpha_1 = \frac{R_o}{R_a} \quad (4-12)$$

Donde se da a relusir la propiedad trigonométrica:

$$\alpha_1 = \tan \gamma_1 \quad (4-13)$$

Ahora si se despeja para el ángulo gamma:

$$\gamma_1 = \arctan \alpha_1 \quad (4-14)$$

Reemplazando la ecuación (4-46) en la ecuación (4-48):

$$\alpha_1 - \beta_1 = \arctan \alpha_1 \quad (4-15)$$

Sí se despeja Beta:

$$\beta_1 = \alpha_1 - \arctan \alpha_1 \quad (4-16)$$



Sí se sustituye la ecuación (4-48) en la ecuación (4-7(4-7)

$$R_a = R_h \cos(\arctan \alpha_1) \quad (4-17)$$

Haciendo uso de dientes trigonométricas se concluye que:

$$R_a = R_h \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + 1}} \quad (4-18)$$

De donde se puede despejar:

$$R_h = R_a \sqrt{\alpha_1^2 + 1} \quad (4-19)$$

En este momento se tienen los instrumentos necesarios para definir los componentes horizontales y verticales del punto C en términos del ángulo  $\alpha$ .

De la Figura 4.11 Se puede apreciar que el componente horizontal de C esta dado como una proyeccion de  $R_h$  en función de  $\beta$ .

$$C_x = R_h \cos \beta_1 \quad (4-20)$$



Sustituyendo la ecuación(4-16) y la ecuación (4-19) en la ecuación (4-20) se encuentra que:

$$C_x = \left( R_a \sqrt{\alpha_1^2 + 1} \right) (\cos(\alpha_1 - \arctan \alpha_1)) \quad (4-21)$$

Una vez alcanzado este punto se puede utilizar la identidad trigonométrica de diferencias de ángulo para el coseno

$$\cos(a - b) = \sin a \sin b + \cos a \cos b \quad (4-22)$$

Si se usa la ecuación (4-22) en la ecuación (4-21) se tiene que:

$$C_x = \left( R_a \sqrt{\alpha_1^2 + 1} \right) (\sin \alpha_1 \sin(\arctan \alpha_1) + \cos \alpha_1 \cos(\arctan \alpha_1)) \quad (4-23)$$

Haciendo uso de identidades trigonométricas se puede reescribir esta ecuación como:

$$C_x = \left( R_a \sqrt{\alpha_1^2 + 1} \right) \left( \sin \alpha_1 \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + 1}} + \cos \alpha_1 \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + 1}} \right) \quad (4-24)$$

En este punto se puede simplificar la ecuación (4-24) para encontrar el componente horizontal del punto C

$$C_x = R_a(\cos \alpha_1 + \alpha_1 \sin \alpha_1) \quad (4-25)$$

Haciendo un análisis similar al que se hizo para encontrar el componente horizontal del punto C, se puede realizar un similar para encontrar el componente vertical del punto C, que lleva como conclusión a la siguiente ecuación:

$$C_y = R_a(\sin \alpha_1 - \alpha_1 \cos \alpha_1) \quad (4-26)$$

De modo que gracias a las ecuaciones (4-25) y (4-26) se puede decir que las ecuaciones paramétricas de la trayectoria que sigue el punto C, conforme se desenvuelve el cordón alrededor del yo-yo, en función del parámetro angular de desenrollamiento son:

$$C(\alpha) \begin{cases} x = R_a(\cos \alpha_1 + \alpha_1 \sin \alpha_1) \\ y = R_a(\sin \alpha_1 - \alpha_1 \cos \alpha_1) \end{cases} \Big|_{0 < \alpha_1 < k} \quad (4-27)$$

En donde k es una constante que representa el ángulo total en el que se desenrolla la cuerda. A esta trayectoria en específico se le conoce como involuta o curva envolvente, y es la solución propuesta por Leonard Euler para la curvatura de los dientes de un engrane. Si se hace la gráfica dicha función se observa que tiene la forma de una espiral como se muestra en la Figura 4.12.

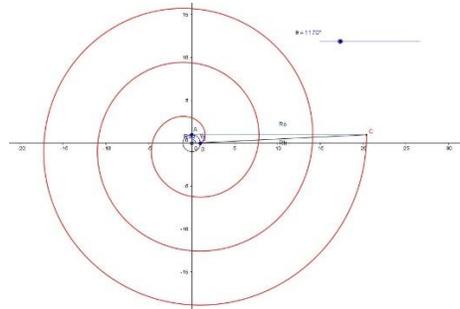


Figura 4.12: curva involuta graficada desde Alfa igual a 0° hasta 1440°

Aunque la ecuación (4-27) describe la involuta de un círculo, para que sea realmente aplicable en un programa CAD, se rota esta ecuación de modo que forme el diente de un engrane, y para lograr esto podemos hacerlo dos veces generando dos curvas diferentes a las que se llama  $C_1$  y  $C_2$  respectivamente. Hay muchas formas de hacer esto, pero la manera más sencilla es multiplicar matricialmente el conjunto de ecuaciones con una matriz de rotación anti horaria

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} R_a(\cos \alpha_1 + \alpha_1 \sin \alpha_1) \\ R_a(\sin \alpha_1 - \alpha_1 \cos \alpha_1) \end{bmatrix} \tag{4-28}$$

Tras realizar la multiplicación se obtiene como resultado la siguiente matriz

$$\begin{aligned} & \left[ R_a \cos \theta_1 (\cos \alpha_1 + \alpha_1 \sin \alpha_1) - R_a \sin \theta_1 (\sin \alpha_1 - \alpha_1 \cos \alpha_1) \right] & (4- \\ & \left[ R_a \sin \theta_1 (\cos \alpha_1 + \alpha_1 \sin \alpha_1) + R_a \cos \theta_1 (\sin \alpha_1 - \alpha_1 \cos \alpha_1) \right] & 29) \end{aligned}$$

Donde  $\theta_1$  es el ángulo que ha sido rotado de forma anti horaria el punto  $B$  con respecto al punto  $O$ , y que se puede trabajar trigonométricamente para simplificar las expresiones, obteniendo así la siguiente expresión

$$\begin{aligned} & \left[ R_a (\cos(\theta_1 + \alpha_1) + \alpha_1 \sin(\theta_1 + \alpha_1)) \right] & (4- \\ & \left[ R_a (\sin(\theta_1 + \alpha_1) - \alpha_1 \cos(\theta_1 + \alpha_1)) \right] & 30) \end{aligned}$$

Para que hay una mayor similitud con los esquemas de literatura tradicional sobre engranes, se manejara una rotación de  $90^\circ$ , por lo que es lo mismo  $\frac{\pi}{2}$  en radianes.

$$\begin{aligned} & \left[ R_a \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} + \alpha_1 \right) + \alpha_1 \sin \left( \frac{\pi}{2} + \alpha_1 \right) \right) \right] & (4- \\ & \left[ R_a \left( \sin \left( \frac{\pi}{2} + \alpha_1 \right) - \alpha_1 \cos \left( \frac{\pi}{2} + \alpha_1 \right) \right) \right] & 31) \end{aligned}$$

Nuevamente con el uso de trigonometría podemos simplificar, obteniendo el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} & \left[ R_a (\alpha_1 \cos(\alpha_1) - \sin(\alpha_1)) \right] & (4- \\ & \left[ R_a (\alpha_1 \sin(\alpha_1) + \cos(\alpha_1)) \right] & 32) \end{aligned}$$



En donde se realiza una gráfica paramétrica, dándole una variación a los valores de Alfa, desde cero hasta  $\pi$  Radianes como se muestra en la Figura 4.13.

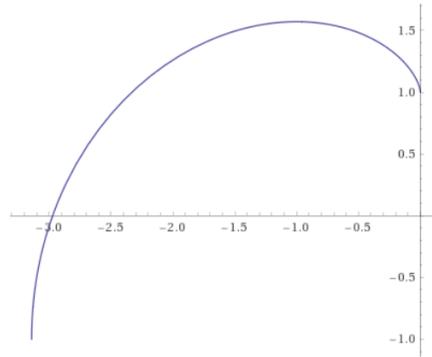


Figura 4.13: gráfica de las ecuaciones (4-32).

Una vez graficada la ecuación paramétrica se puede visualizar que estas ecuaciones hay que volverlas a rotar en sentido horario, la mitad del ángulo del diente del engrane que se desea diseñar medido desde el diámetro base, al que se representa como  $\mathfrak{C}$ .

$$\begin{bmatrix} \cos \mathfrak{C} & \sin \mathfrak{C} \\ -\sin \mathfrak{C} & \cos \mathfrak{C} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} R_a(\alpha_1 \cos(\alpha_1) - \sin(\alpha_1)) \\ R_a(\alpha_1 \sin(\alpha_1) + \cos(\alpha_1)) \end{bmatrix} \quad (4-33)$$

$$\begin{bmatrix} \cos \mathfrak{C} (R_a(\alpha_1 \cos(\alpha_1) - \sin(\alpha_1))) + \sin \mathfrak{C} (R_a(\alpha_1 \sin(\alpha_1) + \cos(\alpha_1))) \\ -\sin \mathfrak{C} (R_a(\alpha_1 \cos(\alpha_1) - \sin(\alpha_1))) + \cos \mathfrak{C} (R_a(\alpha_1 \sin(\alpha_1) + \cos(\alpha_1))) \end{bmatrix} \quad (4-34)$$

Y una vez más se puede utilizar identidades trigonométricas para simplificar las expresiones encontradas.

$$\begin{aligned} & \left[ R_a( \alpha_1 \cos(-\alpha_1 + \mathfrak{C}) + \sin(-\alpha_1 + \mathfrak{C})) \right] && (4- \\ & \left[ R_a(-\alpha_1 \sin(-\alpha_1 + \mathfrak{C}) + \cos(-\alpha_1 + \mathfrak{C})) \right] && 35) \end{aligned}$$

Por dar un ejemplo en donde  $R_a$  en un valor de uno, y  $\mathfrak{C}$  tengo un valor de  $45^\circ$ , por lo que es lo mismo  $\frac{\pi}{4}$  se puede ver que la involuta es rotada el ángulo que se quiere como se muestra en la Figura 4.14.

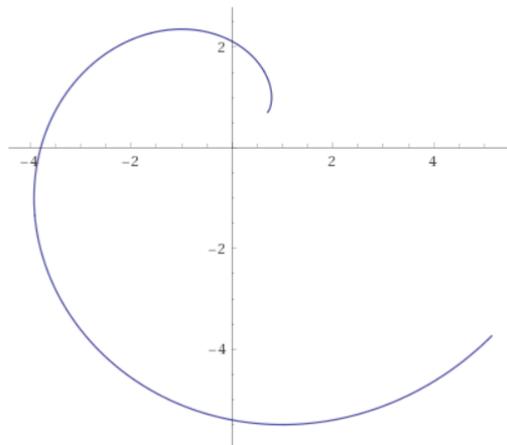


Figura 4.14: gráfica de las ecuaciones (4-35).

Por lo que se puede concluir que la expresión final para la curva involuta que crece en sentido antihorario viene dada por la expresión:

$$C_1(\alpha_1) \left\{ \begin{aligned} x &= R_a( \alpha_1 \cos(\mathfrak{C} - \alpha_1) + \sin(\mathfrak{C} - \alpha_1)) \\ y &= R_a(-\alpha_1 \sin(\mathfrak{C} - \alpha_1) + \cos(\mathfrak{C} - \alpha_1)) \end{aligned} \right\}_{0 < \alpha_1 < k} \quad (4-$$

36)

Donde  $k$  es una constante que representa el ángulo total en el que se desenrolla la cuerda. Para terminar de graficar el diente se puede hacer uso de las propiedades de simetría en la ecuación (4-47) donde se llega a la misma expresión, pero invirtiendo el signo a la función  $x(\alpha_1)$ :

$$C_2(\alpha_1) \begin{cases} x = -R_a( \alpha_1 \cos(\mathfrak{C} - \alpha_1) + \sin(\mathfrak{C} - \alpha_1)) \\ y = R_a(-\alpha_1 \sin(\mathfrak{C} - \alpha_1) + \cos(\mathfrak{C} - \alpha_1)) \end{cases} \Big|_{0 < \alpha_1 < k} \quad \begin{matrix} (4- \\ 37) \end{matrix}$$

Para continuar con el ejemplo interiormente mostrado para la curva paramétrica de  $C_1$ , se hace la gráfica de la ecuación  $C_2$  usando los mismos valores de  $R_a$  y  $\mathfrak{C}$  como se muestra en la Figura 4.15

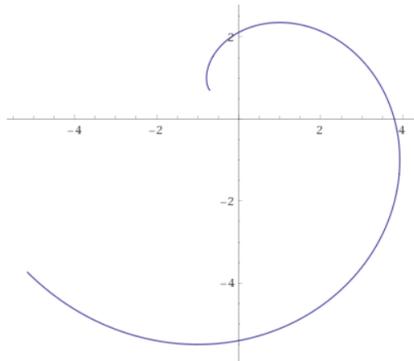


Figura 4.15: gráfica de las ecuaciones (4-37).

Una vez conocidas las ecuaciones paramétricas  $C_1$  y  $C_2$ , se podemos igualarlas y encontrar el parámetro  $\alpha$ , que satisface el punto de intersección, generando así las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} -R_a(\alpha_1 \cos(\mathfrak{C} - \alpha_1) + \sin(\mathfrak{C} - \alpha_1)) & \quad (4- \\ & = R_a(\alpha_1 \cos(\mathfrak{C} - \alpha_1) + \sin(\mathfrak{C} - \alpha_1)) \quad 38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_a(-\alpha_1 \sin(\mathfrak{C} - \alpha_1) + \cos(\mathfrak{C} - \alpha_1)) & \quad (4- \\ & = R_a(-\alpha_1 \sin(\mathfrak{C} - \alpha_1) + \cos(\mathfrak{C} - \alpha_1)) \quad 39) \end{aligned}$$

Si se aprecia la ecuación (4-39) se ve que es redundante, sin embargo no se puede decir lo mismo de la ecuación (4-38) la cual puede reducirse un poco

$$\begin{aligned} -(\alpha_1 \cos(\mathfrak{C} - \alpha_1) + \sin(\mathfrak{C} - \alpha_1)) & = \alpha_1 \cos(\mathfrak{C} - \alpha_1) + \sin(\mathfrak{C} - \alpha_1) \quad (4- \\ & \quad 40) \end{aligned}$$

Aunque aparentemente no se puede despejar  $\alpha$  de la ecuación (4-40) por medio de métodos algebraicos, pero es posible hacer uso de métodos numéricos ya que el valor numérico de  $\mathfrak{C}$  será siempre conocido. Una vez conocido el valor de  $\alpha$ , se puede sustituir su valor en cualquiera de las ecuaciones paramétricas de  $C_1$  o  $C_2$ , para así encontrar el punto de intersección entre estas dos curvas. Si se siguen las ecuaciones sugeridas en este documento la coordenada en  $x$  debe de ser siempre cero, ya que las ecuaciones están diseñadas para que el punto de intersección sea vertical con respecto al origen.

Finalmente hay que notar que en la actualidad es posible resolver este problema por el método gráfico, gracias al uso de computadoras y programas CAD, herramientas con las que no contaban los genios de antaño, y por lo que crearon métodos de aproximación para calcular engranajes bajo un rango delimitado de número de dientes, y bajo la desventaja de no obtener un resultado en condiciones geométricas específicas.

Otra cosa que es muy importante mencionar es que las involutas nacerán siempre de lo que se conoce como diámetro base. Éste diámetro obtiene su nombre debido a que es la base que sostiene la involuta, y bajo ningún concepto debe confundirse con el diámetro de paso, ya que el diámetro de paso es el diámetro del círculo en un engrane que conceptualmente transmite movimiento a otro diámetro de paso en otro engrane.

Para encontrar la relación entre el diámetro de paso y el diámetro base se conoce que, el diámetro de paso al dividirlo entre dos se convierte en lo que se entiende como el radio de paso-y este radio de paso no es más que el radio hipotenusa anteriormente mencionado en la ecuación (4-3) cuando el ángulo  $\alpha$  tiende a un valor específico, este ángulo en particular se le conoce como ángulo de presión, y en este momento es el segundo elemento necesario para diseñar un engrane, por lo tanto este valor queda bajo consideración del diseñador del engrane y es de suma importancia.

Dentro de la industria existen valores estándar para el ángulo de presión que se han utilizado en la industria durante muchos años siendo estos los valores más comunes,

Tabla 2:  
*Ángulo de presión estándar para engranes*

$\theta_p$ (en grados)	Aplicación
14.5°	Bajo nivel sonoro
20°	Estándar
25°	Alta capacidad de carga

**Nota:** el ángulo de 14.5 grados se considera obsoleto [6].

“El ángulo de presión se define como el ángulo entre la línea de acción (normal común) y la dirección de la velocidad en el punto primitivo. Los valores estándar son 14.5°, 20° y 25°, el de 20° es el más utilizado aunque se pudo utilizar cualquier ángulo de presión que se desee, el costo de engranes con ángulo de presión no estándar sería difícil de justificar, pues tendrían que hacerse fresas especiales” [6]

Aunque de momento no hay una investigación que defina realmente cuál es el ángulo de presión óptimo, o cuáles son los criterios para escoger o calcular dicho ángulo, significa que hay áreas de oportunidad para investigaciones futuras de este tema.

Si se define el ángulo de presión escogido como  $\varphi$  entonces la ecuación (4-18) se convertiría en la siguiente expresión:

$$R_b = \frac{R_p}{\sqrt{\varphi^2 + 1}} \quad (4-41)$$

Donde  $R_b$  y  $R_p$  representan el radio del círculo base el radio del círculo de paso respectivamente. Finalmente se puede decir que la relación entre el diámetro base y el diámetro de paso viene dada por la expresión:

$$D_b = \frac{D_p}{\sqrt{\varphi^2 + 1}} \quad (4-42)$$

Donde el ángulo  $\varphi$  está dado en radianes. De la misma forma las ecuaciones paramétricas que describen la involutas se pueden definir en términos del diámetro base:

$$C_1(\alpha_1) \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{D_b}{2} ( \alpha_1 \cos(\mathfrak{C} - \alpha_1) + \sin(\mathfrak{C} - \alpha_1) ) \\ y = \frac{D_b}{2} ( -\alpha_1 \sin(\mathfrak{C} - \alpha_1) + \cos(\mathfrak{C} - \alpha_1) ) \end{array} \right\}_{0 < \alpha_1 < k} \quad (4-43)$$

$$C_2(\alpha_1) \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{D_b}{2} ( \alpha_1 \cos(\mathfrak{C} - \alpha_1) + \sin(\mathfrak{C} - \alpha_1) ) \\ y = \frac{D_b}{2} ( -\alpha_1 \sin(\mathfrak{C} - \alpha_1) + \cos(\mathfrak{C} - \alpha_1) ) \end{array} \right\}_{0 < \alpha_1 < k} \quad (4-44)$$



Lo siguiente en lista es definir el ángulo  $\mathfrak{C}$  y para lograr esto, hay que visualizar que para que los engranes funcionen deben de ser el anti juego de otro visto dentro del diámetro de paso como se muestra en la Figura 4.16, lo que termina definiendo un ángulo de grosor de diente medido desde el diámetro de paso, el cual se expresa como  $\mathfrak{A}D_p$  y que estará en función del tercer y último elemento necesario para definir un engrane, el cual viene siendo el número de dientes.

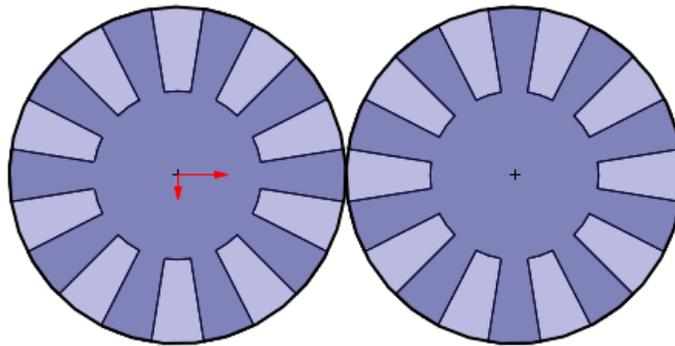


Figura 4.16: representación visual del anti juego de los engranes.

El número de dientes, al diámetro de pasos y al ángulo de presión son los tres elementos que definen la geometría de un engrane, y se expresarán en este trabajo con la simbología que se muestra las siguientes ecuaciones:

$$\text{Número de dientes} = N \quad (4-45)$$

$$\text{Diámetro de paso} = D_p \quad (4-46)$$

$$\text{Ángulo de presión} = \varphi \quad (4-47)$$

Ahora se puede deducir que  $\alpha_{\mathcal{D}_P}$  viene dado por la siguiente expresión

$$\alpha_{\mathcal{D}_P} = \frac{360^\circ}{2N} \quad (4-48)$$

Pero si se recuerda que  $\mathcal{C}$  es un ángulo que define la posición de las involutas, y que estas nacen del diámetro base no del diámetro de paso, es necesario saber cuál es la relación entre el ángulo de grosor del diente medido desde el diámetro de paso y el ángulo de grosor del diente medido en el diámetro base, para poder calcular el ángulo  $\mathcal{C}$  ya que estos dos no son equivalentes. Para esto se puede sustituir el valor del ángulo de presión en la ecuación (4-16) y encontrar el valor de  $\beta$  que satisface el ángulo de presión.

Desde la Figura 4.11 se puede apreciar que la diferencia entre el ángulo del diente medido en el diámetro de paso y el diámetro base es de dos veces el ángulo  $\beta$  encontrado.

$$\alpha_{\mathcal{D}_B} = \alpha_{\mathcal{D}_P} + 2\beta \quad (4-49)$$

Donde representa el ángulo del diente medido desde el diámetro base, y así como se calculó el valor de también se puede utilizar un razonamiento similar para calcular el valor del “hueco” necesario para que impone el diente del engrane continuo medido en el diámetro base con la siguiente expresión:

$$\angle \xi_B = \angle \mathcal{D}_P - 2\beta_1 \quad (4-50)$$

Donde se puede pensar en  $\angle \xi_B$  cómo el ángulo del hueco medido en el diámetro base.

Finalmente, sólo queda decir que el valor de  $\mathcal{C}$  viene dado por la expresión:

$$\mathcal{C} = \frac{\angle \mathcal{D}_B}{2} \quad (4-51)$$

Una vez llegado a este punto se tiene todos los elementos necesarios para ejemplificar por medio de un programa CAD el diseño de un engrane. Se toma como ejemplo diámetro de paso de 9 cm, un ángulo de presión de  $25^\circ$ , y 12 dientes, se hace uso del programa CAD de nombre NX y el resultado en este punto se muestra en la Figura 4.17.

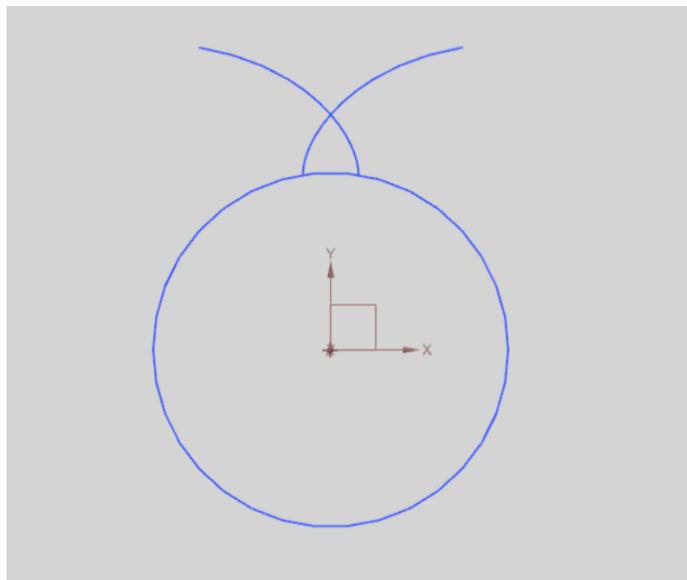


Figura 4.17: elementos representados en un programa CAD.

Cómo se mencionó anteriormente, aunque es preferible conocer de antemano la coordenada y del punto de intersección de las curvas involutas, para posteriormente restarle el radio base y encontrar así la altura máxima permisible del diente. No es precisamente necesario, ya que los programas CAD permiten medir esta distancia como se muestra en la Figura 4.18, en lo que se pudiera considerar una mezcla entre el método gráfico y el método numérico. Mostrando en este punto la principal diferencia entre realizar el diseño de un engrane por medios de literatura convencional y el método que se propone.

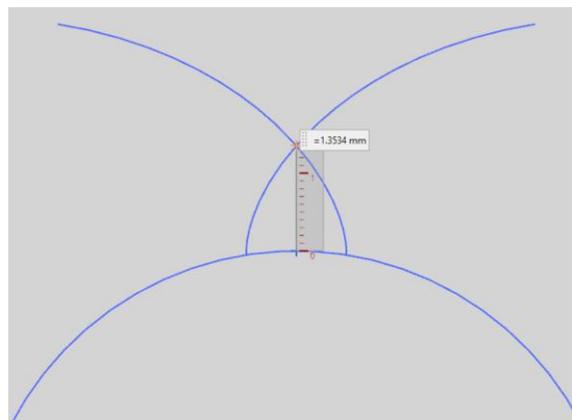


Figura 4.18: altura máxima permisible del diente de un engrane.

Debido a la naturaleza de estos números, es prácticamente nula la probabilidad de obtener un número racional en la altura permisible del diente que de ahora en adelante se denota como  $h_j$ .

Y por practicidad se definirá un diámetro que tiene un radio de cruce  $R_c$ , el cual irá desde el centro del engrane hasta el punto de intersección de las involutas, definiendo colateralmente un diámetro de cruce  $D_c$ .

De modo que  $h$  se calculará ya sea con un método numérico para un valor de  $\varphi$  específico, o se obtendrá directamente de un programa CAD midiendo dicha distancia. Mientras que  $D_c$  estará dado por la fórmula

$$D_c = D_b + 2h \quad (4-52)$$

Para calcular lo que se conoce como diámetro exterior del engrane, el sentido común dice que el diámetro exterior debe de ser mayor al diámetro de paso y al diámetro base, pero también debe de ser menor al diámetro de cruce que se propone en este trabajo. Por lo tanto, se sugiere el uso de la siguiente fórmula para asegurar que estas condiciones se cumplan.

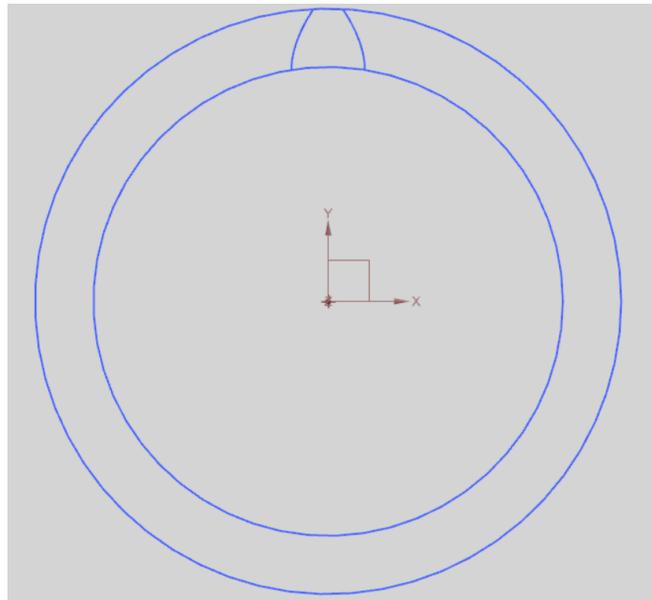
$$D_e = \frac{\text{floor}(10^n(D_b + 2 p h) + 0.5)}{10^n} \quad (4-53)$$

$$h = \frac{D_e - D_b}{2} \quad (4-54)$$

Donde  $p$  es el porcentaje que representa la altura física del diente ( $h$ ) con respecto a la altura máxima permisible del diente ( $h$ ), y  $n$  es el numero de decimales que se desea tener en el diámetro exterior  $D_E$ .

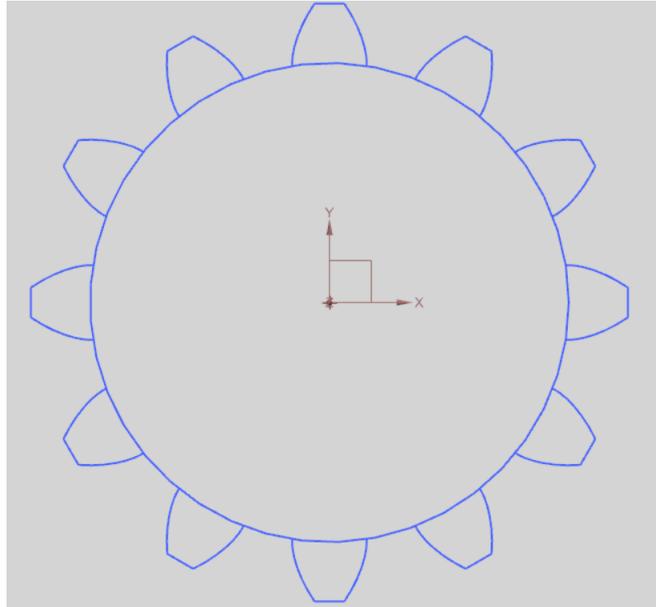
El valor de  $p$  es algo que también queda bajo el libre albedrío del diseñador, y al ser un valor distintivo de este método de diseño, no hay una forma de decir a ciencia cierta cuál sea el valor óptimo a utilizar, pero con base a la experiencia de los diseños realizados se sugiere utilizar un valor de  $p$  de  $3/4$  de forma genérica. Mientras que el valor de  $n$  representa el número de decimales que el proceso de fabricación permita realizar, en el caso trabajar con centímetros se recomienda un valor de  $n$  de uno o dos, y un valor de cero para cuando se trabaja con milímetros.

Continuando con el ejemplo CAD, el diámetro exterior que se presenta a continuación se calculó utilizando el valor de  $3/4$  para  $p$ , y ya que el documento está configurado en milímetros se le dio un valor de cero a  $n$ , el resultado visual como se muestra en la Figura 4.19.



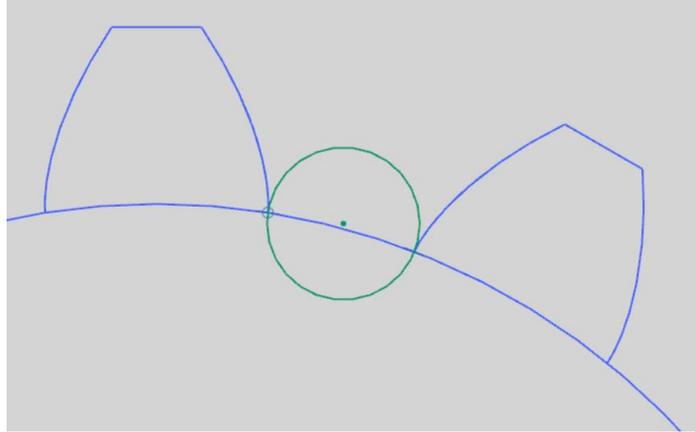
*Figura 4.19: diente de un engrane delimitado por el diámetro base y el diámetro exterior.*

Ahora sólo resta realizar un patrón circular de las curvas que forman el diente y se tiene un bosquejo general del engrane que se formará como se muestra en la Figura 4.20.



*Figura 4.20: perfil de un engrane típico*

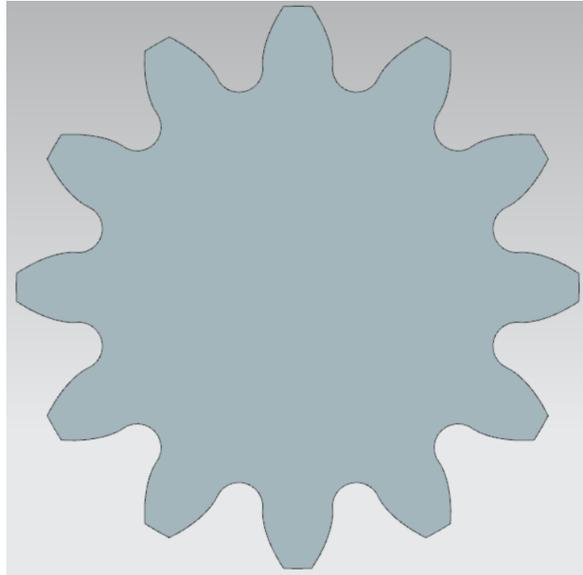
El siguiente paso se realiza con la intención de reducir los esfuerzos generados en el diente por lo que se conoce como factor de forma, realizando un corte circular tangente a las involutas de dos dientes continuos como se muestra en la Figura 4.21.



*Figura 4.21: corte circular entre dientes.*

El corte circular mencionado anteriormente no solamente ayuda reducir los esfuerzos generados por el factor de forma, sino que reduce el peso del engrane y evita el problema de contacto entre las cabezas de los dientes de los engranes. Aunque el corte circular muestra cierto nivel de mejora, queda como posibles trabajos futuros analizar los efectos de otro tipo de curvas en este corte, siendo de especial interés el analizar curvas catenarias, las cuales son ampliamente utilizadas en la arquitectura por sus propiedades.

De la misma manera que se realizó un patrón circular para realizar los múltiples dientes del engrane se para realizar el patrón circular para los múltiples cortes que se realizan entre los dientes dando así la forma final de nuestro engrane, el cual se muestra como un solido en la Figura 4.22.



*Figura 4.22: engrane completado.*

Es sumamente importante mencionar que todo este procedimiento es para diseñar un piñón en un tren de engranes, en otras palabras, este es el engrane más pequeño del sistema engranajes que se desea diseñar.

Para que varios engranes trabajen conjuntamente de una forma óptima existen ciertas condiciones que se deben cumplir en función del piñón del tren de engranes. Dichas condiciones es que compartan el mismo ángulo de presión  $\varphi_1$ , altura física del diente de engrane  $h$ , y módulo  $m$ . Éste último es una relación entre el número de dientes de un engrane y su diámetro de paso, como se muestra en la siguiente expresión.

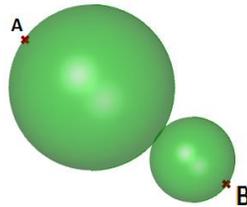
$$m = \frac{D_p}{n} \quad (4-55)$$

El hecho de que el tren de engranajes cuente con la misma altura física en todos los engranes, hace que se modifique la expresión para el diámetro exterior en los engranes con un diámetro de paso mayor al del piñón. Para calcular los diámetros exteriores del resto de los engranes se utilizará la siguiente expresión.

$$D_e = D_b + 2h \quad (4-56)$$

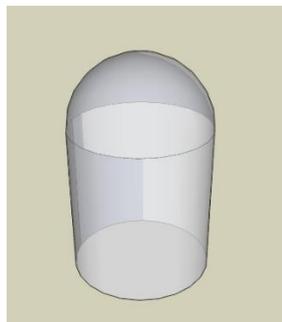
### 4.3 Diseño de articulación homocinética

En la Figura 4.4 se puede notar la revolución del perfil del engrane sobre dos ejes concéntricos a su centro, simulando de esta forma dos esferas por medio de la revolución de lo que vendrían siendo sus diámetros de paso, estas esferas estarían en contacto de forma tangencial como se muestra en la Figura 4.23, de forma análoga a los diámetros de paso en un engrane.



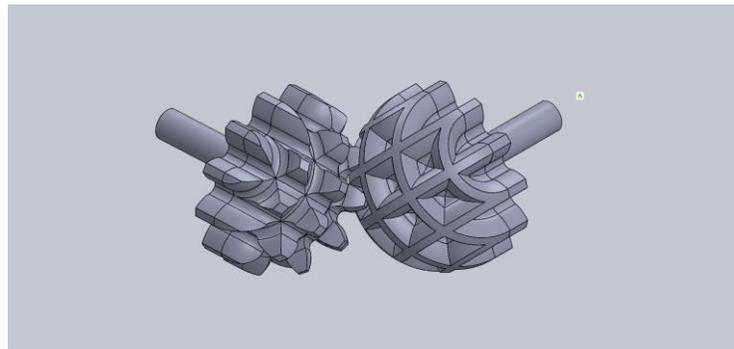
*Figura 4.23: esquema de dos esferas en contacto de forma tangencial.*

Aunque el engrane hembra es el resultado de revolucionar el perfil del engrane sobre dos ejes ortogonales entre sí, el engrane macho es el resultado de agregar revoluciones de corte al negativo del engrane hembra. Para reforzar la capa más frágil de dientes en el engrane macho, se optó por añadir una sección cilíndrica acoplada a la media esfera producida por la revolución como se muestra en la Figura 4.24.



*Figura 4.24: segmento cilíndrico añadido a una media esfera*

Dando como resultado engranes esféricos ligeramente diferentes a los propuestos por el inventor Hanling Hong [46]. Para evitar el caso en donde exista un único diente transmitiendo el movimiento por un prolongado tiempo, se opta por la misma configuración que utilizó Hanling Hong, la cual tiene cuatro dientes en contacto con el cuadrante de la esfera más alejado de la flecha como se muestra en la Figura 4.25.



*Figura 4.25: engranes esféricos articulación homocinética*

Esto genera una nueva condición, el número de dientes del perfil del engrane que se revoluciona para crear el engrane esférico debe de ser múltiplo del número cuatro. El ejemplo que se muestra en la imagen es de 12 dientes.

El siguiente paso fue diseñar un mecanismo de sujeción para dichos engranes que permitiera los 2 grados de libertad de movimiento del mecanismo, pero que al mismo tiempo fuera un elemento que mantenga posicionados los engranes a la distancia necesaria para el funcionamiento óptimo de los engranes, para que pudiera funcionar como el punto de unión entre las flechas del mecanismo final, este mecanismo de sujeción se muestra en la Figura 4.26.

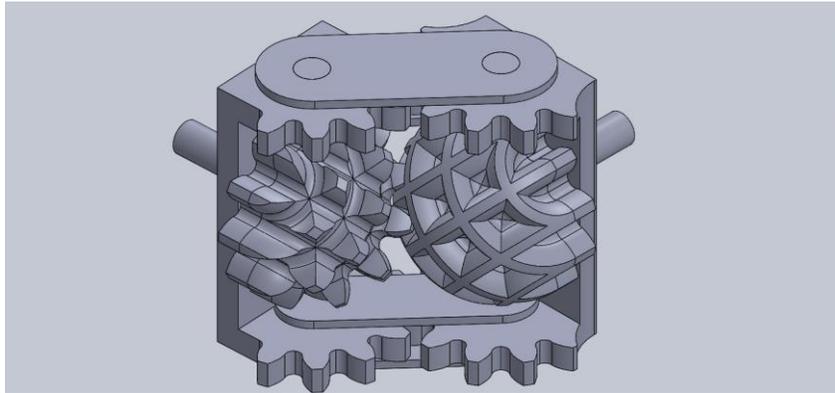


Figura 4.26: engranes esféricos y su mecanismo de sujeción

Este mecanismo de sujeción se puede representar en un diagrama de cuerpo libre visto desde un plano superior, esta representación constaría de tres segmentos de recta de distancia constante. Dos de esas rectas representarían los ejes que sujetan a los engranes, y la tercera representaría la distancia que une los centros de las dos esferas, generando el mismo ángulo en la unión del tercer segmento con los primeros dos, como se muestra en la Figura 4.27.

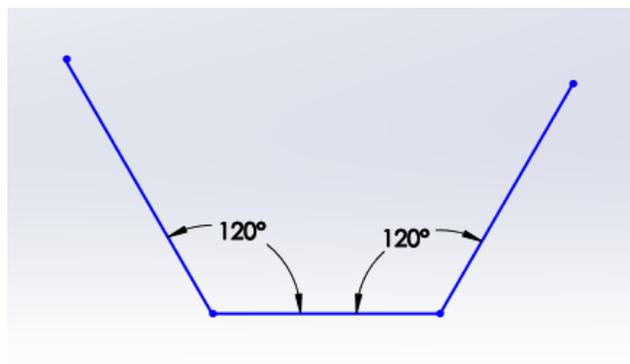


Figura 4.27: diagrama cuerpo libre para el mecanismo de sujeción.

## CAPÍTULO V

### DISEÑO DEL MECANISMO

Recordando la Figura 3.8, los puntos de articulación K y P son representaciones de la junta homocinética que se desarrolló durante el capítulo cuatro. Pero como se ve al final del capítulo cuatro, la representación de esa articulación no es un punto en donde rotan dos barras, sino más bien dos barras que rotan en los extremos de una tercera barra imaginaria (la cual es la distancia que separa los centros de los engranes esféricos). Lo que termina cambiando los esquemas realizados en la sección 3.2 de este trabajo. Haciendo pasar un diagrama de cuerpo libre un mecanismo de cuatro barras a un mecanismo de seis barras con un solo grado de libertad visto desde una vista superior.

#### **5.1 Diagrama de cuerpo libre**

Es posible hacer un modelo matemático que define la posición de este mecanismo de una forma similar a la del mecanismo de cuatro barras. Sin embargo realizar esto sería un proceso muy tardado y por eso se opta por representar gráficamente las condiciones de este problema, y resolverlo por medio de un programa CAD. Lo cual pudiera considerarse una combinación entre el uso del método gráfico convencional para la resolución de problemas, y el uso de métodos numéricos, los cuales utilizan de forma interna los programas CAD para representar los diferentes puntos que componen un croquis.

Dicho esto, hay ciertas condiciones que deben cumplirse a la hora de representar el diagrama de cuerpo libre, si partimos de que todas las juntas homocinéticas son iguales sus distancias de centros será la misma, por lo tanto, las tres barras imaginarias que unen los centros de los engranes deberán tener la misma distancia o, dicho de otra manera, se genera una restricción geométrica que convierte estos tres segmentos de líneas representativas en iguales.

La segunda condición tiene que ver con el número de dientes de los engranes esféricos, ya que la posición inicial del mecanismo tendrá un ángulo definido por la siguiente expresión:

$$\frac{4\mathcal{D}_P}{2} \quad (5-1)$$

Además, el punto final del mecanismo, el cual se desea que sea el centro geométrico del neumático del vehículo debe mantenerse en un solo punto, y cerco lineal al origen del mecanismo.

Para simplificar aún más este proceso se realiza el diagrama el mecanismo en su posición final la cual se puede considerar la más crítica para que el ángulo formado por una de las barras imaginarias sea completamente llano, y lo que deja un solo ángulo para deducir, el cual se puede encontrar con la siguiente expresión.

$$\frac{270 - 4\mathcal{D}_P}{2} \quad (5-2)$$

Y por último la distancia de la barra imaginaria que uniría el centro de la llanta con el origen del mecanismo que haría como un parámetro diseño el cual se puede variar según sea necesario, para que el mecanismo no tenía interferencias consigo mismo, y que además cumpla con las condiciones de ancho de vehículo.

Aunque en realidad no es completamente necesario, para este caso en particular se ~~decidió~~ decide hacer de la misma distancia el eje uno y el eje tres para simplificar aún más las condiciones del problema.

A continuación, se muestra en la Figura 5.1 el diagrama de cuerpo libre que se realizó en el programa CAD, una vez sometido a las condiciones las distancias de los tres ejes del mecanismo pueden ser medidas directamente de él.

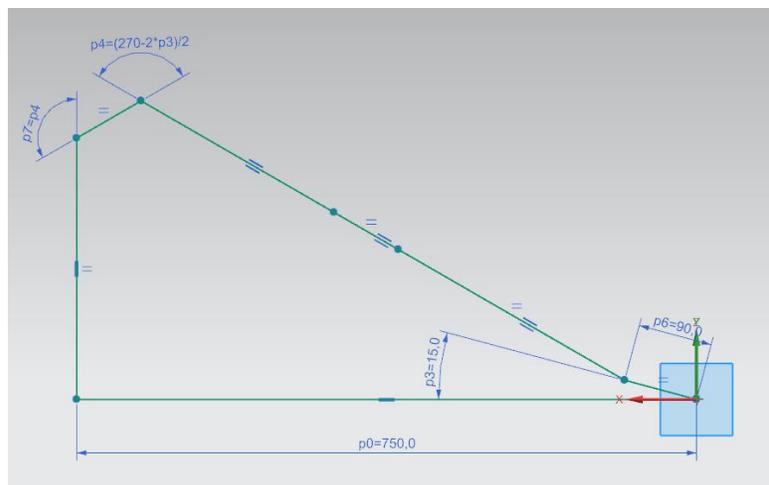


Figura 5.1: diagrama de cuerpo libre del mecanismo final

Con esto se tienen todos los elementos para realizar el diseño de todas las piezas del mecanismo, y realizar su ensamble para posteriormente realizar simulaciones de naturaleza cinemática.

## 5.2 Ensamble final

Debido al doble grado de libertad con los que cuentan los engranes esféricos, se debe generar de alguna forma una condición de paralelismo entre todas las caras superiores de los diferentes mecanismos de sujeción de cada una de las juntas homocinéticas, como se muestra en la Figura 5.2.

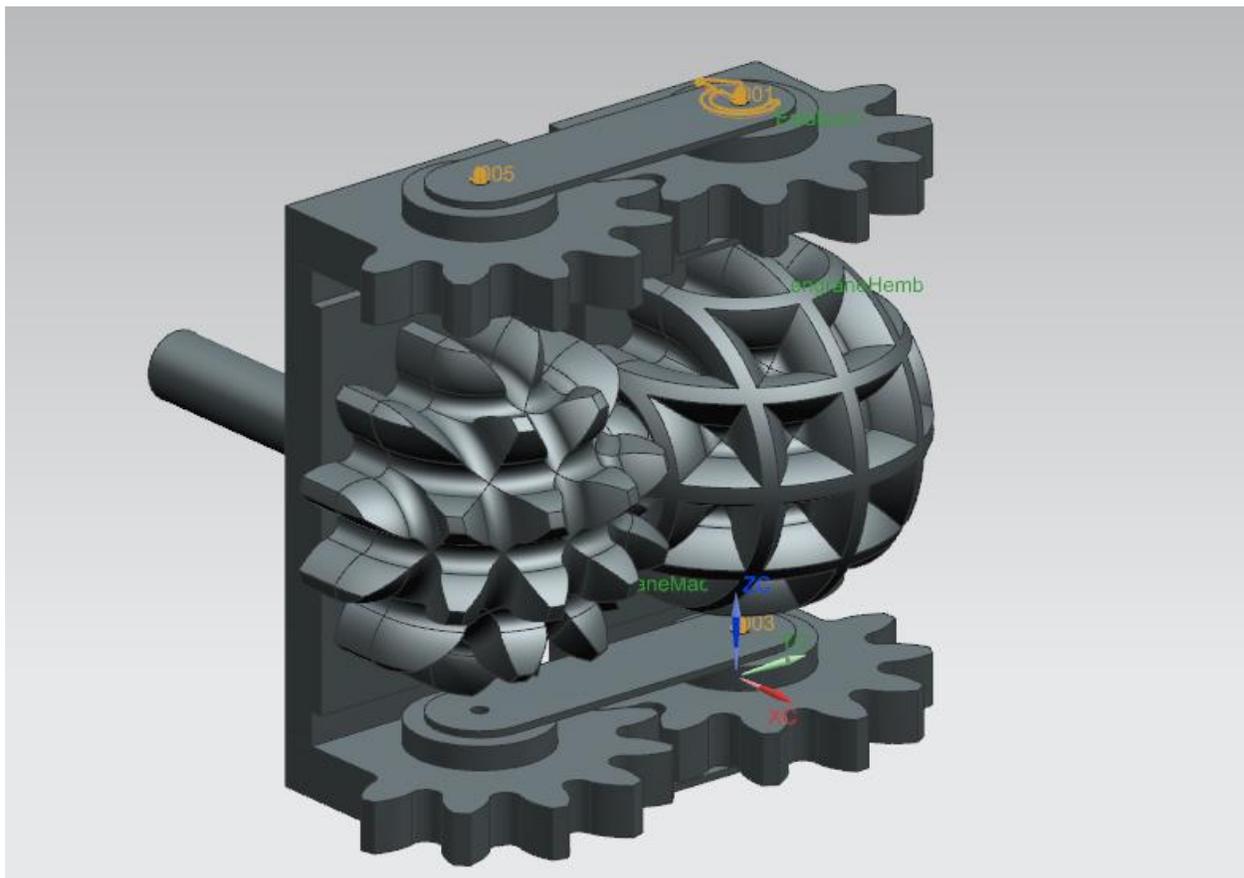
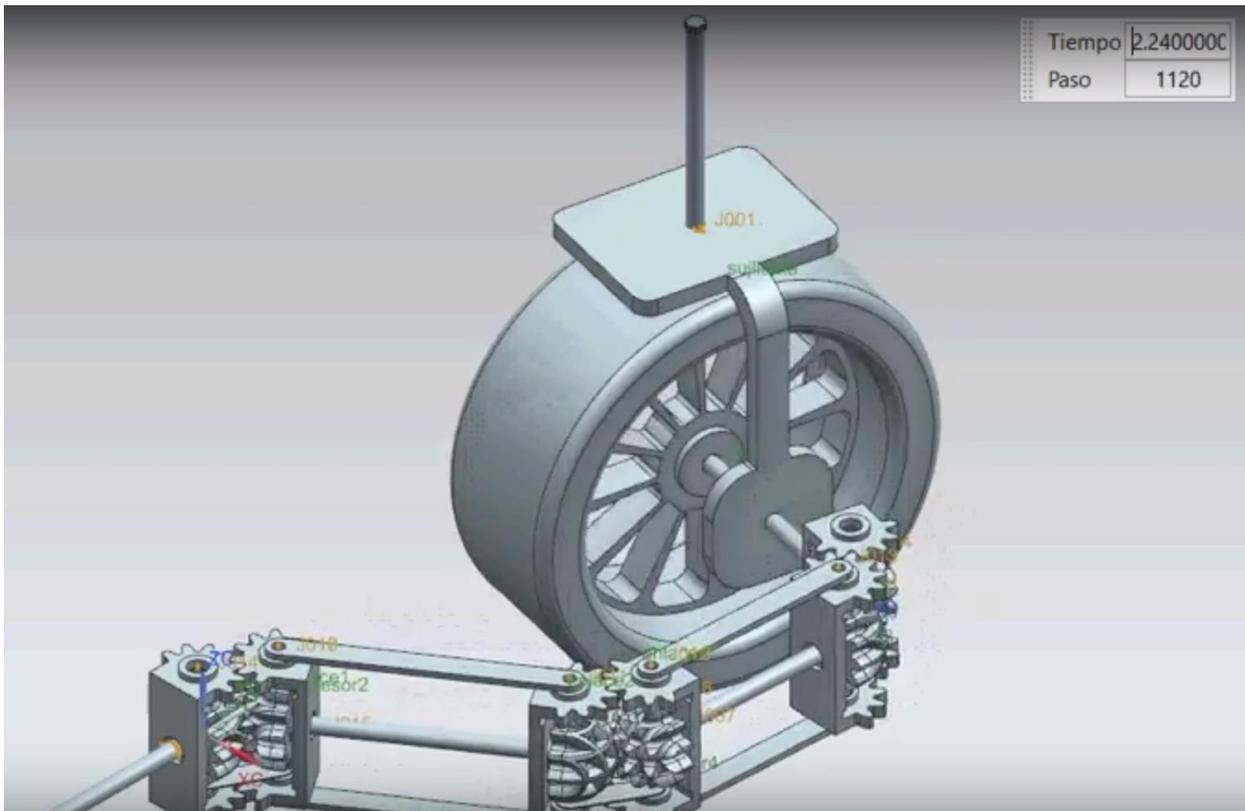


Figura 5.2: junta homocinética

Para lograr esto se decide unir mediante barras los centros geométricos de los engranes esféricos que no son continuos entre sí, para poder apreciar esto a continuación se muestra en la Figura 5.3 el ensamble completo, el cual incluye un elemento de sujeción para el neumático.



*Figura 5.3: ensamble final en su posición inicial*

De este modo al tener una sola junta homocinética se mantiene la condición de paralelismo entre todas las juntas.

### 5.3 simulación cinemática

Para poder estar seguros de que no haya interferencias en el mecanismo se realizó una simulación cinemática, la cual demostró que dependiendo del tamaño de los engranes esféricos se puede realizar una interferencia en posiciones críticas con el neumático, dicho problema se puede resolver simplemente cambiando las dimensiones del neumático, el diámetro de paso de los engranes esféricos o la longitud de las barras. A continuación, se muestra en la Figura 5.4 la posición inicial del mecanismo en una vista superior

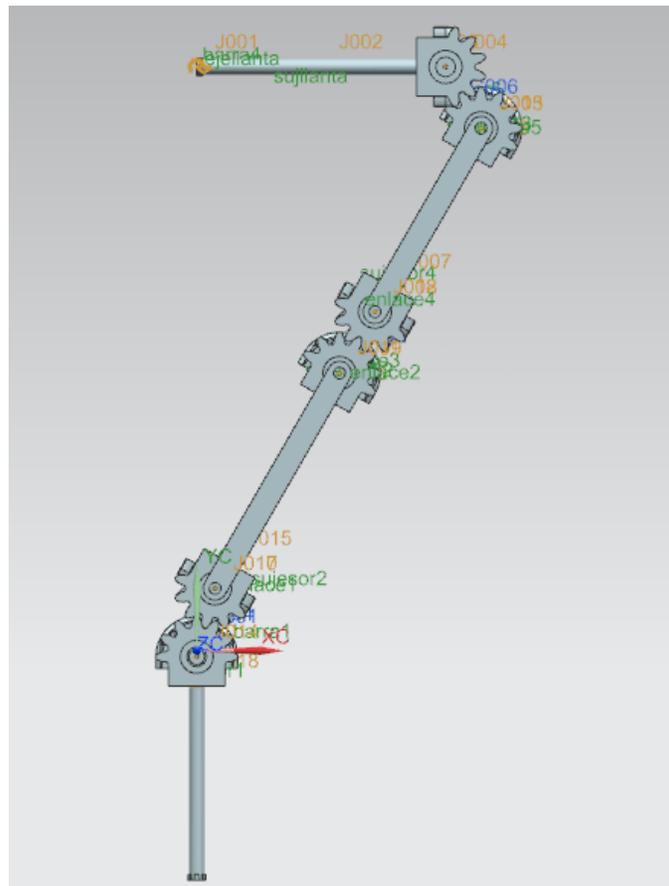


Figura 5.4: Posición inicial del mecanismo

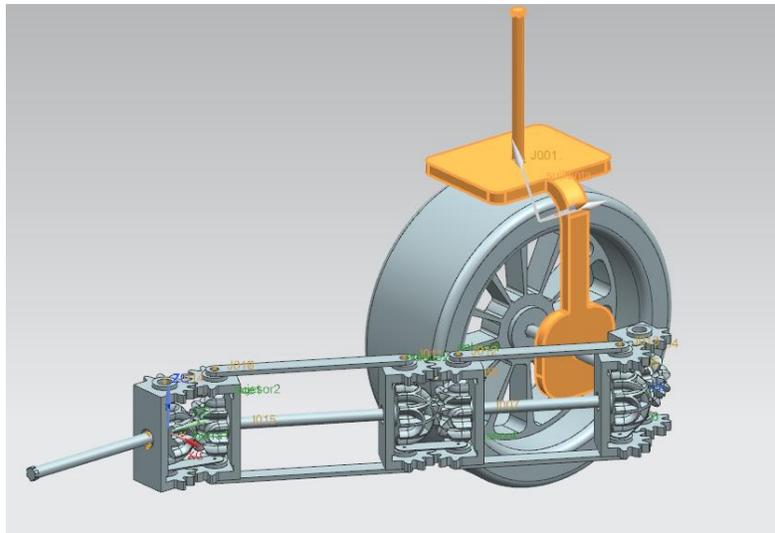
Debido a la semejanza de ciertas secciones del mecanismo con eslabones, se decide nombrar este mecanismo como eslabones tangentes.

## CAPÍTULO VI

### RESULTADOS Y CONCLUSIONES

A pesar de que el mecanismo realizado no mostraba ninguna interferencia, la velocidad angular de la llanta en la simulación no era constante, por lo que se procedió a realizar gráficas de velocidad angular de diferentes partes del mecanismo para buscar una respuesta a este comportamiento.

Lo primero que se hizo fue medir la velocidad angular de un elemento de entrada de movimiento al mecanismo, el cual se puede apreciar con mayor detalle en la Figura 6.1.



*Figura 6.1: pieza con entrada de movimiento ortogonal al eje del neumático*

Esta pieza al ser una entrada de movimiento del mecanismo debería tener una velocidad constante pues es lo que se especifica en los parámetros para realizar la simulación.

A continuación, se muestra la gráfica de velocidad de dicha pieza durante la simulación de movimiento por medio de la Figura 6.2, en donde se puede apreciar que la variación barras de 5.999999 a 6.000001 grados por segundo, lo cual pudiera considerarse como una constante, y es de esperarse pues al ser un parámetro entrada no debería tener variación.

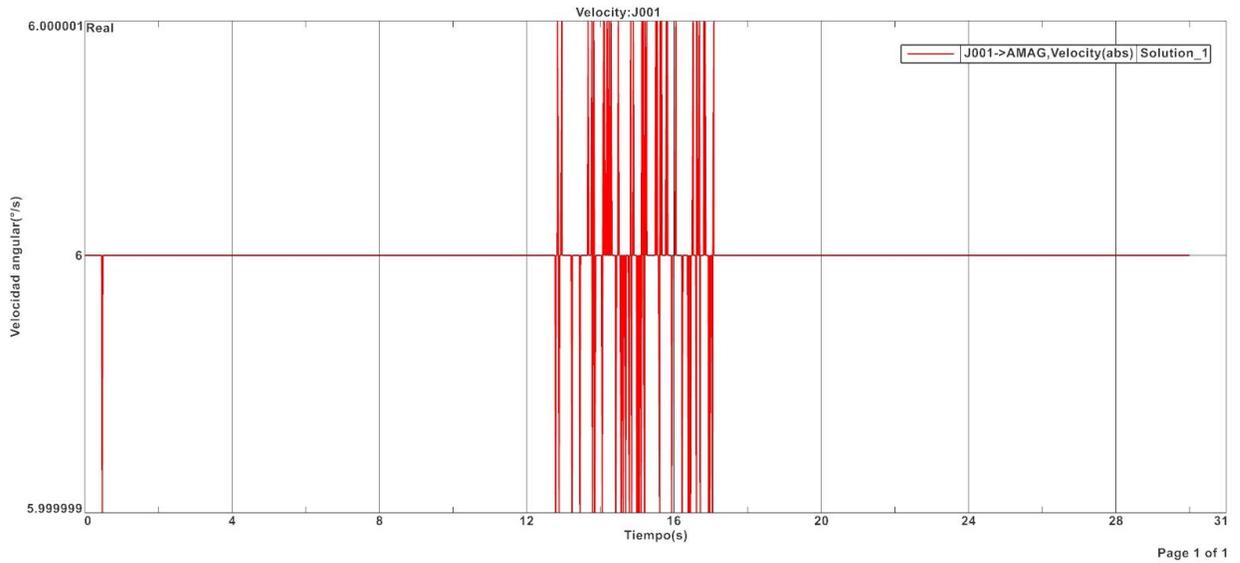
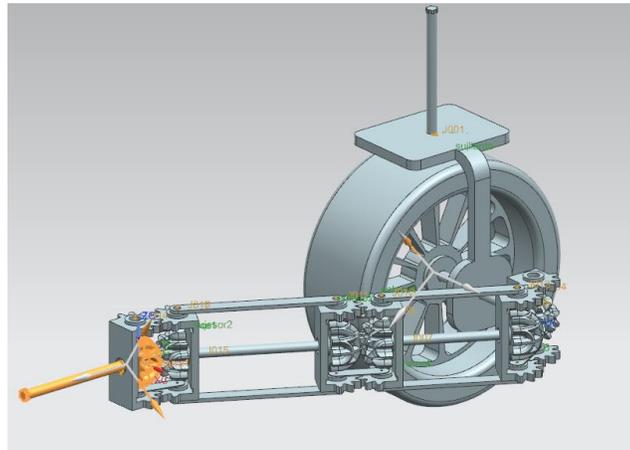


Figura 6.2: gráfica de velocidad angular del sucesor del neumático.

Lo siguiente en analizarse fue el otro elemento de entrada de movimiento al mecanismo el cual se puede ver en la Figura 6.3, ya que este mecanismo cuenta únicamente con dos grados de libertad estos dos elementos son los que definen por completo el movimiento del mecanismo.



*Figura 6.3: eje de entrada de movimiento*

Sorprendentemente este elemento que se configuró una rotación de 120 grados por segundo presentó variaciones no despreciables a pesar de ser un elemento de entrada de movimiento, lo que da a sospechar que el módulo utilizado para la simulación cinemática pudiese no ser el más óptimo para este tipo de mecanismos, que dependen fuertemente del uso de engranes, la gráfica de velocidad angular se presenta en la Figura 6.4.

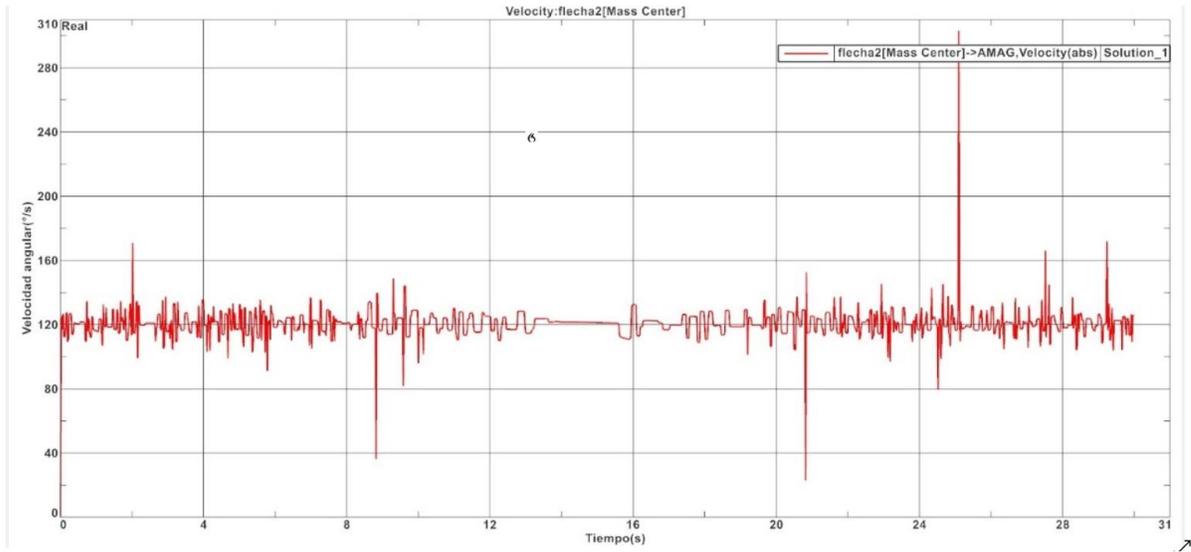


Figura 6.4: gráfica de velocidad angular del eje de entrada de movimiento

Por último, se analiza la velocidad de salida en el neumático el cual se resalta en la Figura 6.5.

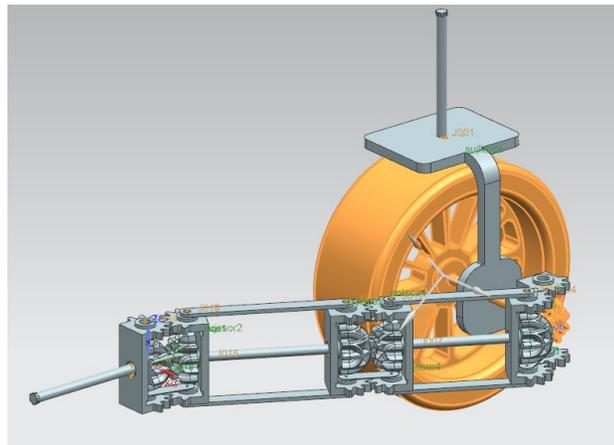
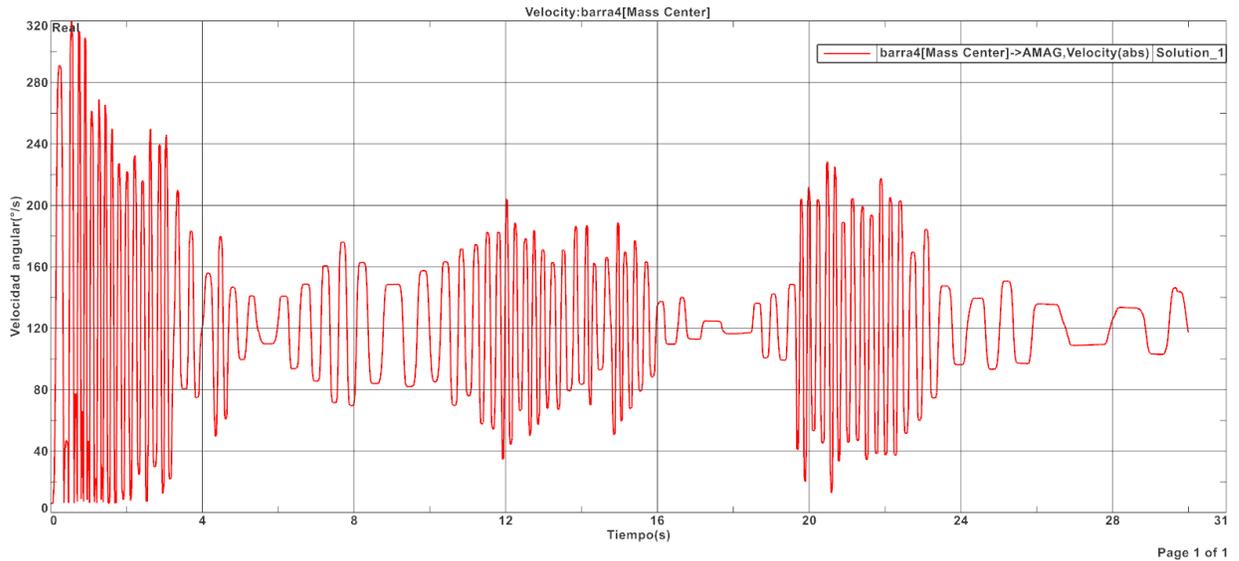


Figura 6.5: elemento de velocidad de salida del mecanismo



*Figura 6.6: velocidad angular del neumático.*

Las variaciones en la velocidad angular del neumático que se muestran en la Figura 6.6 resultan tan abruptas que pareciera que el mecanismo no es viable, sin embargo se puede inferir que esta gráfica es el resultado de las interacciones de las vibraciones y variaciones de velocidad de las diferentes juntas homocinéticas, las cuales al ser sido diseñadas con perfil de engrane no deberían existir en primer lugar.

Se prosiguió analizar la velocidad de salida en una única junta homocinética, a la cual se le aplicaron dos velocidades angulares constantes en sus dos grados de libertad para ver si la reducción del mecanismo afectaba la respuesta, y también para ver si la velocidad de salida era constante, la Figura 6.7 nos muestra una captura de esta simulación mientras que la Figura 6.8 nos muestra los resultados de velocidad angular a la salida de la junta.

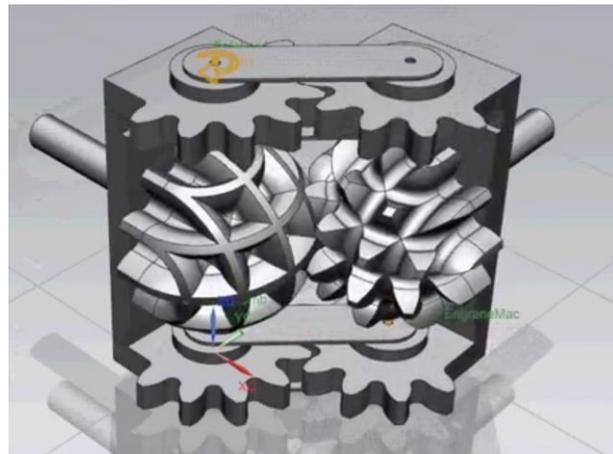


Figura 6.7: junta homocinéticas movimiento

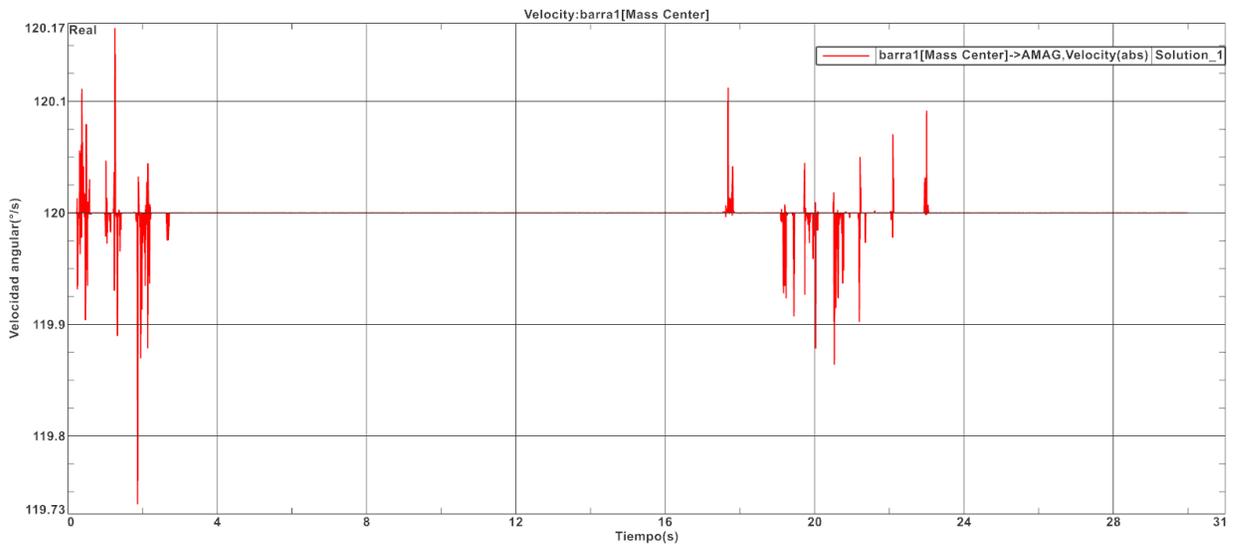


Figura 6.8: velocidad de salida en la junta homocinética



Aunque la gráfica muestra vibraciones, se puede apreciar que la salida de movimiento es prácticamente constante, cumpliendo de esta forma su cometido, estas vibraciones mostradas en esta gráfica no sólo se presentan en los engranes esféricos sino también en los engranes convencionales cuando se realiza este tipo de estudio de movimiento, como muestran los resultados encontrados en las investigaciones del Dr. V. Balambica [48]. Debido a esto se ejecutaron los mismos análisis en elementos idealizados de los engranes, como el caso que se muestra en la Figura 6.9, en los cuales se encontraron resultados similares. Por lo que se concluye que la variabilidad de la velocidad angular a la salida del mecanismo diseñado no se debe al mecanismo en sí, sino a la selección incorrecta del módulo para la simulación cinemática. Lo que pudiera ser analizado en trabajos futuros ya sea con un software más especializado en simulaciones cinemáticas y/o dinámicas, o sobre observación de un prototipo físico.



*Figura 6.9: lóbulos como elemento idealizado.*

**Anexo 1. Medidas de coches eléctricos nuevos ordenados por longitud**

Renault Twizy



Smart fortwo



Smart fortwo cabrio



Peugeot iOn



Mitsubishi i-MiEV



Citroen C-Zero



Smart forfour



Volkswagen up!



Citroen E-Méhari



BMW i3



Renault Zoe



DS DS3 Crossback



Kia Soul



Volkswagen Golf



Kia Niro



Hyundai IONIQ



Nissan Leaf



Jaguar I-PACE



Tesla Model 3



Mercedes-Benz EQC



Audi e-tron



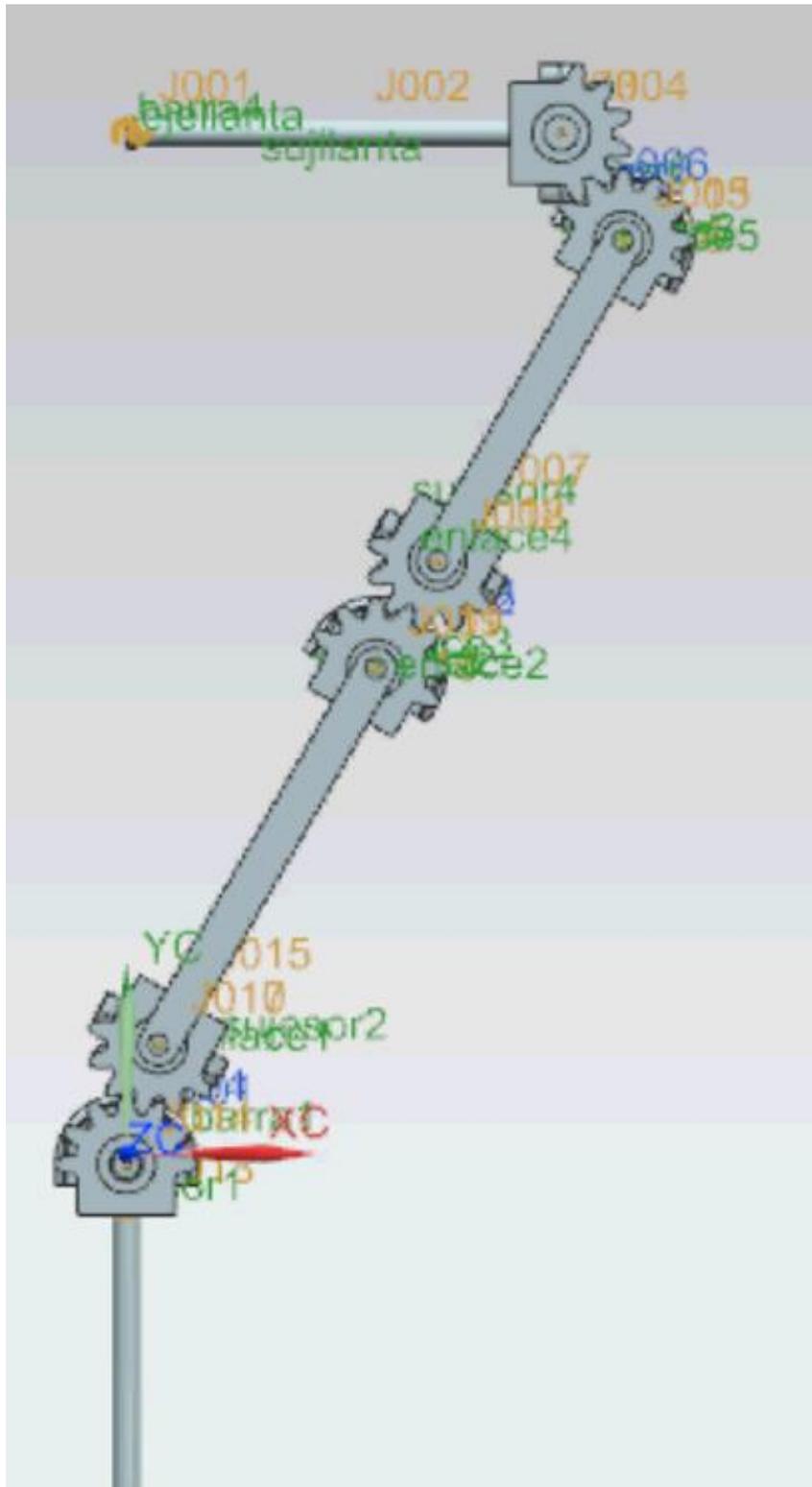
Tesla Model S



Tesla Model X

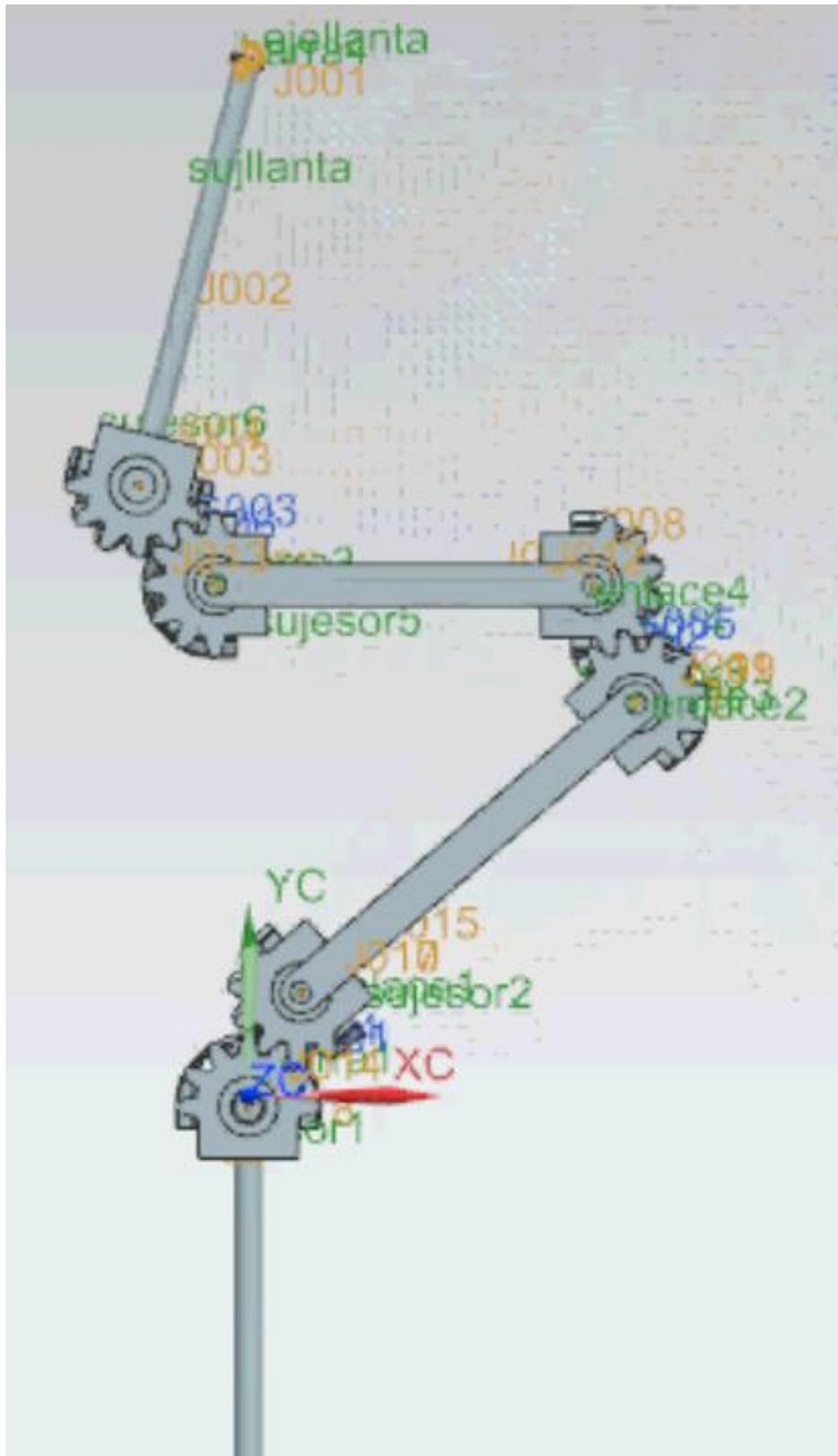


Anexo 2. Vista superior de las posiciones críticas del mecanismo.



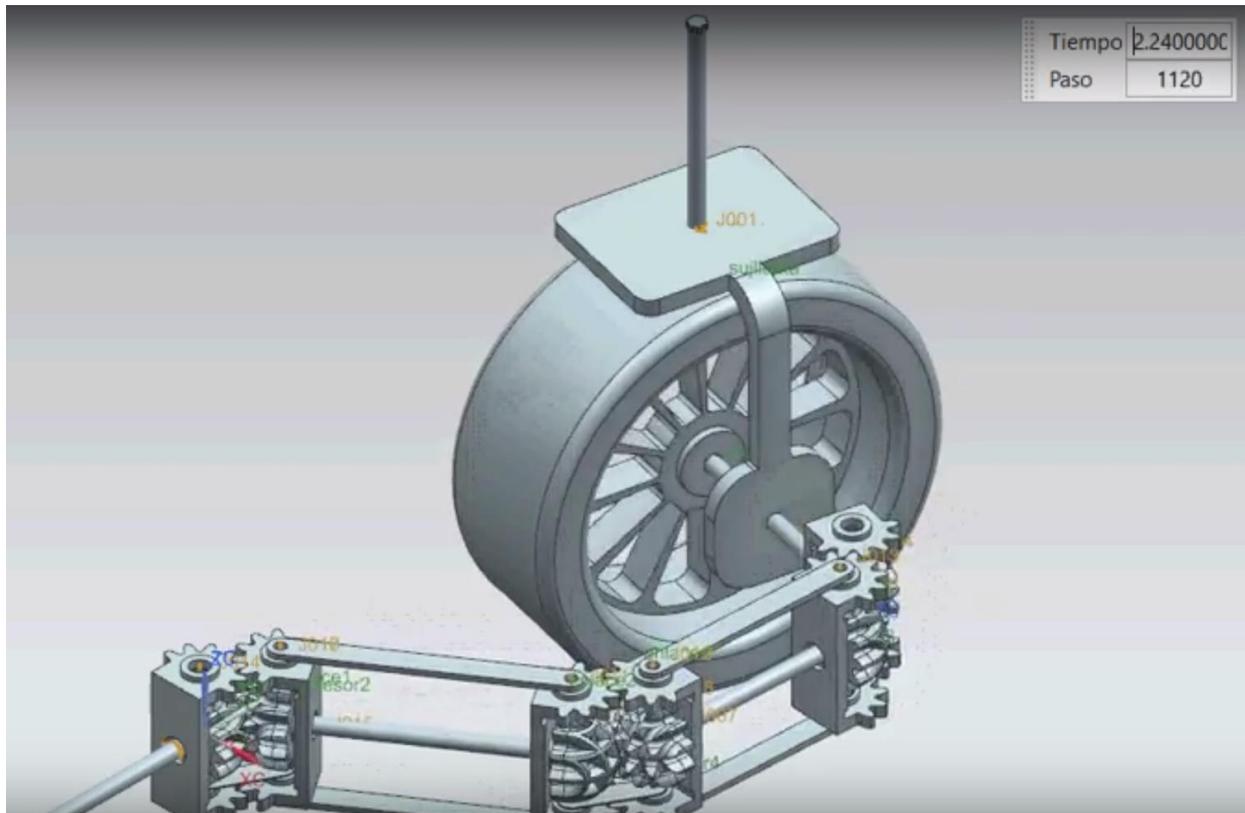




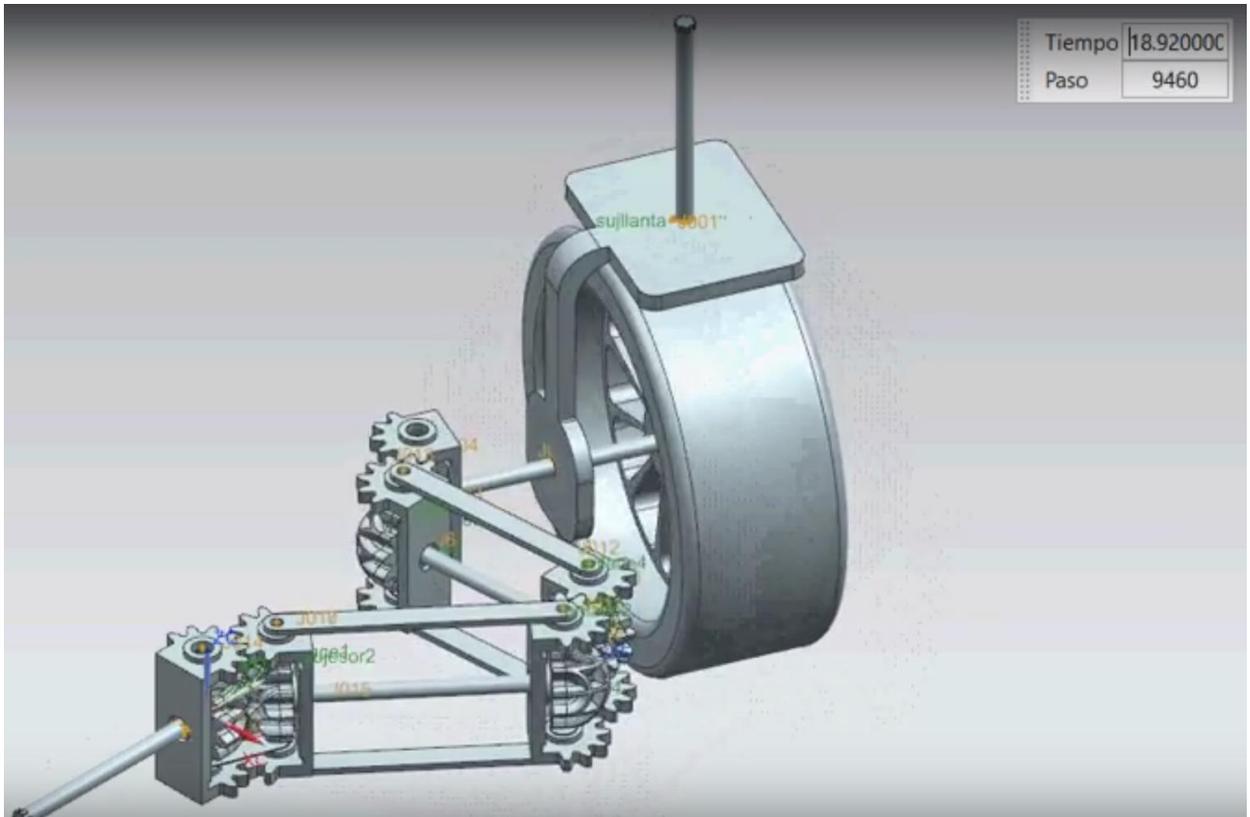


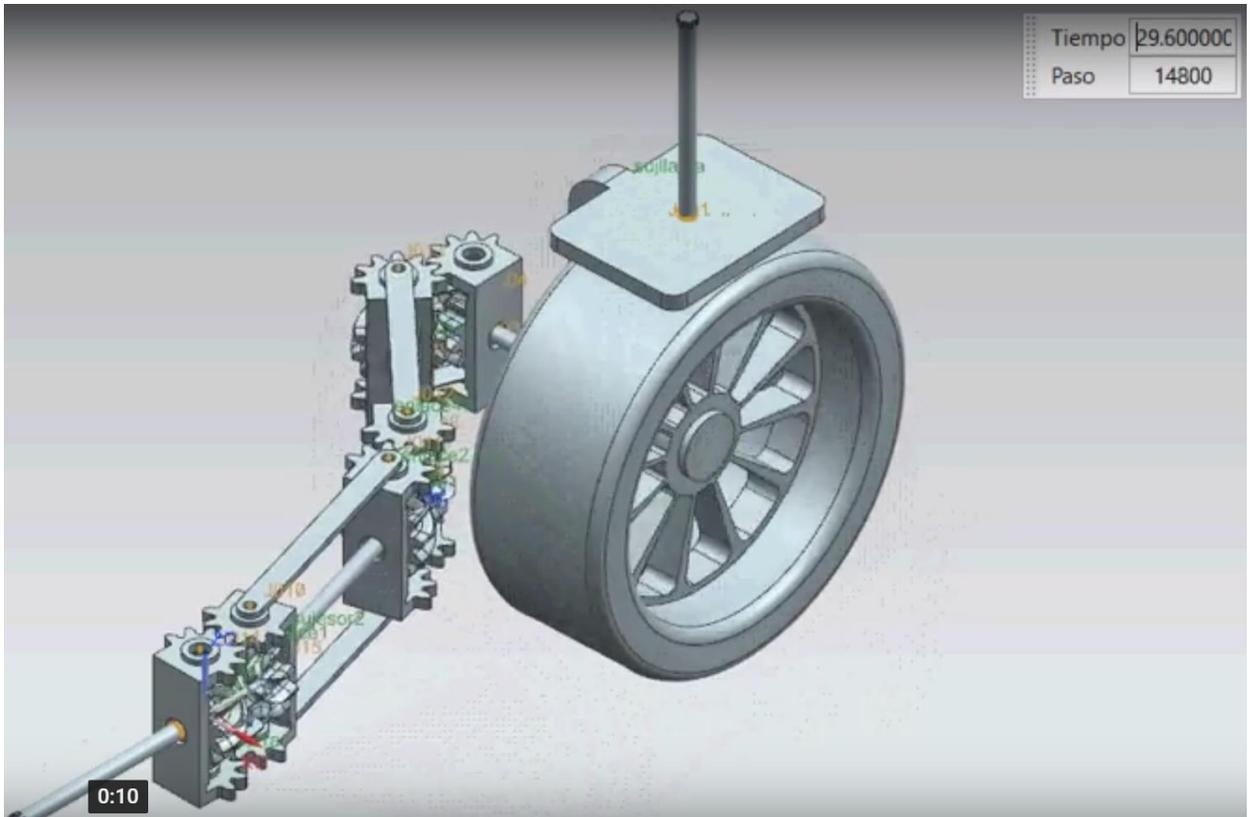




**Anexo 2. Vista isométrica de las posiciones críticas del mecanismo.**







**REFERENCIAS**

- [1] Z. Qi *et al.*, “4-Wheel Independent in-wheel-motor Drive and Independent Steering Electric Vehicle safety analysis method based on mass re-distribution experiment,” *ICARA 2015 - Proc. 2015 6th Int. Conf. Autom. Robot. Appl.*, pp. 22–27, 2015.
- [2] Otago Polytechnic, “Amazing electric car built at Otago Polytechnic - YouTube,” 2013. [Online]. Available: <https://www.youtube.com/watch?v=r-OAzXqLd0Y>. [Accessed: 26-Nov-2018].
- [3] A. Alvendia, *Drifting: Sideways From Japan to America*, Illustrated. 2006.
- [4] W. Adams, “ELECTRIC MOTOR.,” U.S. Patent 300827 A, 1884.
- [5] X. Zhu, H. Qiu, Z. Dong, Z. Qi, and Y. Zhang, “Steering coordination control of front wheels for a four in-wheel-motor drive electric vehicle,” *2012 19th Int. Conf. Mechatronics Mach. Vis. Pract. M2VIP 2012*, vol. 2, pp. 521–525, 2012.
- [6] R. L. Norton, *Design of Machinery*, vol. 125, no. 3. 2003.
- [7] Z. Qit, “FPGA Implementation of High Sampling Rate Adaptive Wiener Filter,” pp. 114–117, 2011.
- [8] H. Qiu, T. Z. Qi, Z. Lei, X. Zhu, and Z. Deng, “A novel design of an Electric Vehicle with lateral moving and in situ steering,” *2011 2nd Int. Conf. Mech. Autom. Control Eng. MACE 2011 - Proc.*, no. 333, pp. 7138–7141, 2011.
- [9] Z. Qi, K. Ma, N. Sargeant, and W. Phipps, “An engineering design of real-time fault monitoring method for power-on-wheel electric vehicles,” *ICARA 2015 - Proc. 2015 6th Int. Conf. Autom. Robot. Appl.*, pp. 11–16, 2015.

- [10] Z. Dong, P. He, C. Han, Z. Qi, Z. Deng, and H. Qiu, "The design of anti-slip control for in-wheel motor at the limited conditions in a four in-wheel-motor drive electric vehicle," *19th Int. Conf. Mechatronics Mach. Vis. Pract.*, pp. 526–530, 2012.
- [11] H. Wang, K. Tang, and K. Qin, "Biorthogonal wavelets based on gradual subdivision of quadrilateral meshes," *Comput. Aided Geom. Des.*, vol. 25, no. 9, pp. 816–836, 2008.
- [12] B. Robotics, "A road surface identification method for a four in-wheel-motor drive electric vehicle Zhijun Deng Ziming Tom Qi \* Zhurong Dong , Ping He , Chengwei Han and Shaoyun Ren," vol. 2, 2013.
- [13] B. Robotics, "Parameterisation analysis for a four in-wheel-motors drive and four wheels independent steering electric vehicle based on multi-body inverse kinematics Shaoyun Ren \*, Zhurong Dong \*, Hao Qiu and Zhanyu Li Ziming Tom Qi," vol. 2, pp. 124–134, 2013.
- [14] S. Liang, Z. T. Qi, Z. Dong, H. Qiu, and S. Hu, "A novel control method for electric power steering system based on dead-zone inverse transforming compensation in a four-in-wheel-motor drive electric vehicle," *Int. J. Biomechatronics Biomed. Robot.*, vol. 2, no. 2/3/4, p. 81, 2013.
- [15] S. Ren, H. Qiu, Z. Dong, and Z. Qi, "An Inverse Kinematics Analysis for a Four In-wheel-motor Drive and All-wheel Independent Steering Electric Vehicle," pp. 28–30, 2012.
- [16] P. He, Z. Dong, S. Liang, Z. Qi, and H. Qiu, "A Novel Design of All-wheel Independent Steering Using Regenerative In-wheel motors for a Four In- wheel-motor Drive Electric Vehicle," pp. 28–30, 2012.
- [17] Z. Li, Z. Qi, Z. Dong, Z. Deng, and S. Ren, "An Optimal Control Design of Independent Suspension Based on Adams for a Four In-wheel- motor Drive Electric Vehicle," pp. 28–

- 30, 2012.
- [18] H. Qiu, "A New Motors Fault Tolerance Control Strategy to 4WID Electric Vehicle," pp. 17–21, 2015.
- [19] H. Qiu, S. Liang, Z. Qi, and H. Qin, "A Novel design of an In-situ Steering for a 4-wheel Independent Steering in a 4-in-wheel-motor Drive Electric Vehicle," *2012 19th Int. Conf. Mechatronics Mach. Vis. Pract.*, pp. 28–30, 2012.
- [20] J. S. R. Christopher E. BorroniBird, Robert L. Vitale, Chunhao J. Lee, Robert O. Ambrose, William J. Bluethmann, Lucien Q. Junkin, Jonathan J. Lutz, Raymond Guo, Anthony Joseph Lapp, "MODULAR ROBOTIC VEHICLE," U.S. Patent 9085302 B2, 2015.
- [21] A. Haruhiko and M. West, "Design of a Holonomic Omnidirectional Vehicle," *Proc. 1992 IEEE Int. Conf. Robot. Autom.*, 1992.
- [22] J. Grabowiecki, "Vehicle-Wheel," U.S. Patent 287071, 1919.
- [23] S. M. ; Killough and F. G. Pin, "OMN-DIRECTIONAL AND HOLONOMIC ROLLING PLATFORM WITH DECOUPLED ROTATIONAL AND TRANSLATIONAL DEGREES OF FREEDOM," U.S. Patent 005374879 A, 1988.
- [24] B. E. Llon, "Wheels for a course stable selfpropelling vehicle movable in any desired direction on the ground or some other base," U.S. Patent 3876255 A, 1975.
- [25] A. Gfrerrer, "Geometry and kinematics of the Mecanum wheel," *Comput. Aided Geom. Des.*, vol. 25, no. 9, pp. 784–791, 2008.
- [26] L. in J. Nissin Medical Industries Co., "TOYOTA MOTOR EAST JAPAN, INC. | Products : All Wheel Drive Powered Wheelchair." [Online]. Available: <http://www.toyota-ej.co.jp/english/products/patrafour.html>. [Accessed: 16-Nov-2018].
- [27] Fuji Shinichiro, "OMNI-DIRECTIONAL TRAVELING WHEEL AND TRAVELING

- DEVICE,” U.S. patent 20080018167 A1, 2004.
- [28] K. Tadakuma, R. Tadakuma, and J. Berengeres, “Development of holonomic omnidirectional vehicle with ‘Omni- Ball’: Spherical wheels,” *IEEE Int. Conf. Intell. Robot. Syst.*, pp. 33–39, 2007.
- [29] K. Tadakuma and R. Tadakuma, “Mechanical design of ‘Omni-Ball’: Spherical wheel for holonomic omnidirectional motion,” *Proc. 3rd IEEE Int. Conf. Autom. Sci. Eng. IEEE CASE 2007*, vol. 788, pp. 788–794, 2007.
- [30] K. Tadakuma *et al.*, “Crawler vehicle with circular cross-section unit to realize sideways motion,” *2008 IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robot. Syst. IROS*, pp. 2422–2428, 2008.
- [31] W. A. Frantz and S. Heights, “Liddiard Wheel,” U.S. Patent 20120181846 A1, 2012.
- [32] M. West and H. Asada, “Design and control of ball wheel omnidirectional vehicles,” *IEEE Int. Conf. Robot. Autom.*, vol. 2, 1995.
- [33] S. Ishida and H. Miyamoto, “Ball wheel drive mechanism for holonomic omnidirectional vehicle,” *World Autom. Congr. (WAC), 2010*, 2010.
- [34] M. Wada, T. Hirama, and Y. Inoue, “Traction analysis for Active-caster omnidirectional Robotic drive with a Ball Transmission (ACROBAT),” *2013 IEEE/ASME Int. Conf. Adv. Intell. Mechatronics Mechatronics Hum. Wellbeing, AIM 2013*, pp. 274–279, 2013.
- [35] M. Sato, G. Yamamoto, D. Gunji, T. Imura, and H. Fujimoto, “Development of Wireless In-Wheel Motor Using Magnetic Resonance Coupling,” *IEEE Trans. Power Electron.*, vol. 31, no. 7, pp. 5270–5278, 2016.
- [36] NASA Johnson Space Center, “Modular Robotic Vehicle (MRV).” [Online]. Available: <https://technology.nasa.gov/patent/MS-C-TOPS-74>. [Accessed: 26-Nov-2018].
- [37] CNN, “NASA’s new car can drive sideways - YouTube,” 2015. [Online]. Available:

- [https://www.youtube.com/watch?v=c\\_1Sg1dJ7i8](https://www.youtube.com/watch?v=c_1Sg1dJ7i8). [Accessed: 26-Nov-2018].
- [38] D. King-Hele, "Erasmus Darwin's Improved Design for Steering Carriages And Cars," *R. Soc.*, vol. 4, no. 1433, p. 438, 1967.
- [39] L. of the R. S. of Arts, *Guard Book, The letters of Erasmus Darwin*, vol. 12, no. 5. Cambridge University Press, 1982.
- [40] E. Lopez, "TM230," 2014. [Online]. Available: [http://ftp.demec.ufpr.br/disciplinas/TM230/Prof\\_Eduardo\\_Lopes/](http://ftp.demec.ufpr.br/disciplinas/TM230/Prof_Eduardo_Lopes/). [Accessed: 07-Dec-2018].
- [41] O. Mendoza-Trejo, C. A. Cruz-Villar, R. Peón-Escalante, M. A. Zambrano-Arjona, and F. Peñuñuri, "Synthesis method for the spherical 4R mechanism with minimum center of mass acceleration," *Mech. Mach. Theory*, vol. 93, pp. 53–64, 2015.
- [42] H. I. Medellín-Castillo and J. J. Cervantes-Sánchez, "An improved mobility analysis for spherical 4R linkages," *Mech. Mach. Theory*, vol. 40, no. 8, pp. 931–947, 2005.
- [43] Thang, "thang010146." [Online]. Available: [https://www.youtube.com/channel/Ucli\\_RJkGWfZvw4IIDLHNCQg](https://www.youtube.com/channel/Ucli_RJkGWfZvw4IIDLHNCQg). [Accessed: 29-May-2019].
- [44] O. Van Deventer, "Flip Gears," 8 October, 2017. [Online]. Available: <https://www.youtube.com/watch?v=Sg5znXqimyU>. [Accessed: 29-May-2019].
- [45] O. van Deventer, "Flip Gears | 3D Printing Shop | i.materialise." [Online]. Available: <https://i.materialise.com/en/shop/item/flip-gears>. [Accessed: 29-May-2019].
- [46] HANLIN HONG, "INVOLUTE NON-RING CONTINUOUS TEETH SPHERICAL GEAR TRANSMISSION MECHANISM," 2014.
- [47] C. M. D. General Motors, *Around The Corner - How Differential Steering Works (1937) -*

*YouTube*. 1937.

- [48] S. K. Dr.V. Balambica, Ravi Kumar Soni, Satyam Kumar, Subodh Kumar, “International Journal of Pure and Applied Mathematics,” *Int. J. Pure Appl. Math.*, vol. 116, no. 20, pp. 335–340, 2017.